第11回 基礎ゼミ
確率的利用者均衡モデル

福田研究室　修士1年
城間 洋也

Outline

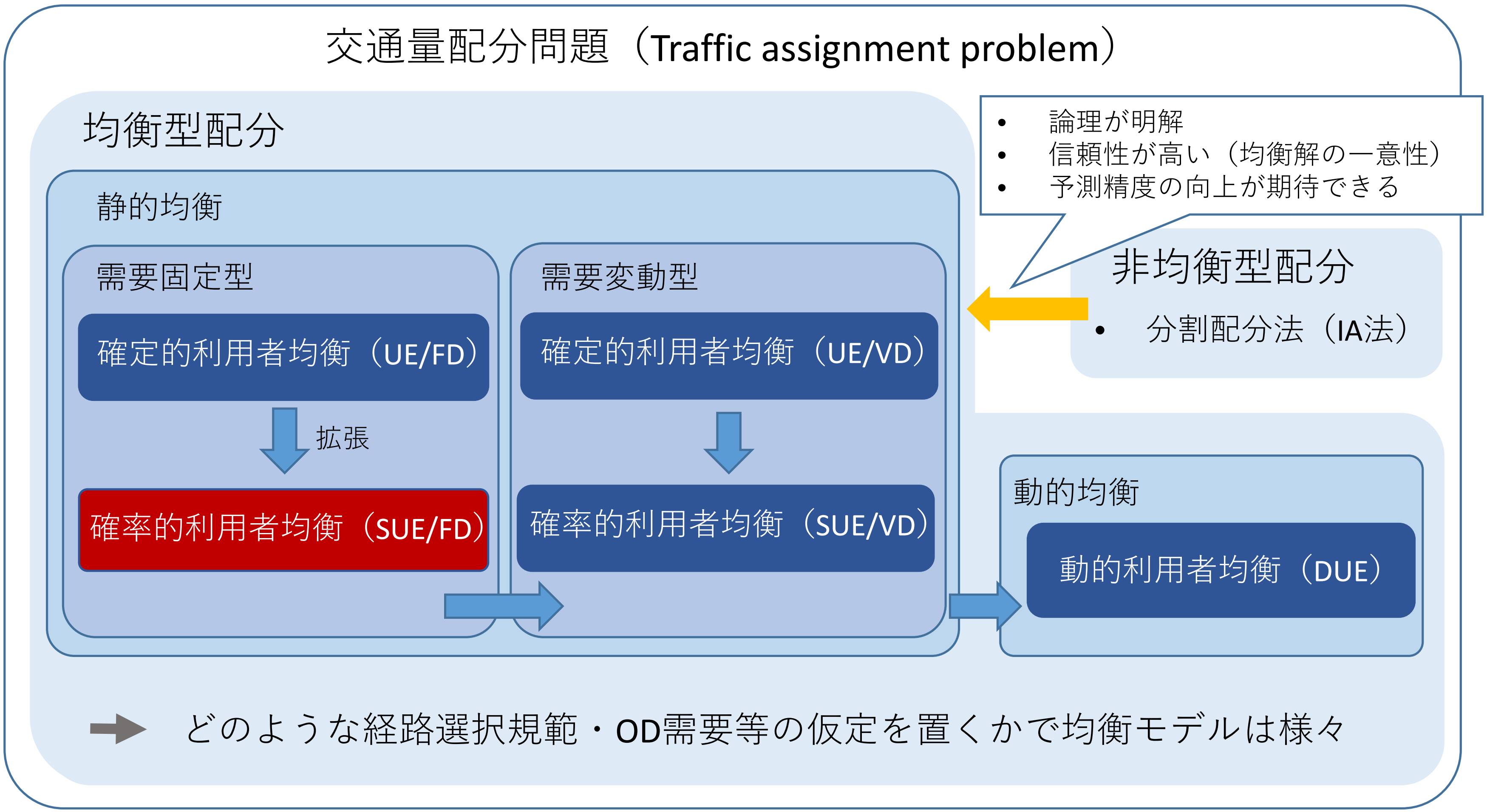
➢ はじめに
- 今日やること
- 前回の復習

➢ 確率的利用者均衡配分
- 確率的配分モデル（6.1）
- エントロピー・モデル（6.2）
- 確率的利用者均衡配分の定式化（6.3）
- 確率的利用者均衡配分と等価最適化問題（6.4）

➢ 確率的利用者均衡配分の解法

はじめに：今日やること

- 位置づけ



はじめに：前回の復習

- 需要固定型確定的利用者均衡配分（UE/FD : User Equilibrium with Fixed Demand）
  経路選択規範がWardropの第一原則に従う
  →利用される経路の旅行時間は皆等しく、利用されない経路の旅行時間よりも小さいかせいぜい等しい

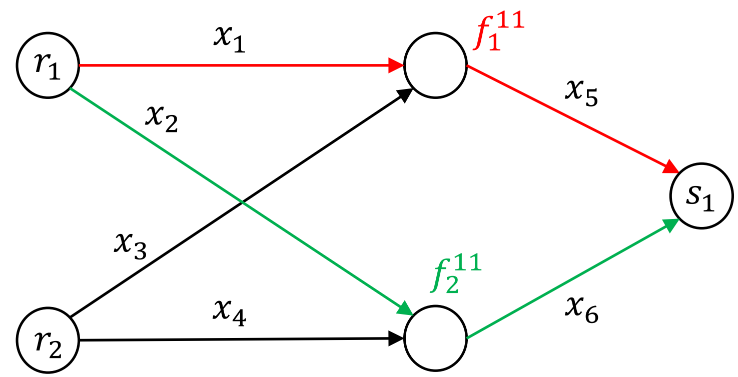
利用者均衡式：

$$\begin{cases} f_k^{rs} > 0 \text{のとき} & c_k^{rs} = c_{rs} \\ f_k^{rs} = 0 \text{のとき} & c_k^{rs} \geq c_{rs} \end{cases} \quad (\forall k \in K_{rs}, \forall rs \in \Omega)$$

制約条件：

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0 \quad (\forall rs \in \Omega)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad (\forall k \in K_{rs}, \forall rs \in \Omega)$$



効率化

等価な最適化問題：

$$min.\, Z_p = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

$$sub.to \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0 \ (\forall rs \in \Omega), x_a = \sum_{k \in K_{rs}} \sum_{rs \in \Omega} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs} \ (\forall a \in A)$$

$$f_k^{rs} \geq 0, x_a \geq 0$$

f_k^{rs}: ODペアrsの経路kの経路交通量
c_k^{rs}: ODペアrsの経路kの所要時間
c_{rs}: ODペアrsの最小所要時間
q_{rs}: ODペアrsの分布交通量
K_{rs}: ODペアrsの経路集合
x_a: リンクaのリンク交通量
$t_a(x_a)$: リンクaのリンクコスト関数
Ω: ネットワーク上のODペア集合
A: ネットワーク上のリンク集合

$$\delta_{a,k}^{rs} := \begin{cases} 1 \text{：ODペア}rs\text{経路}k\text{がリンク}a\text{を含む} \\ 0 \text{：そうでないとき} \end{cases}$$

確率的利用者均衡配分（SUE : Stochastic User Equilibrium）

- 確定的利用者均衡

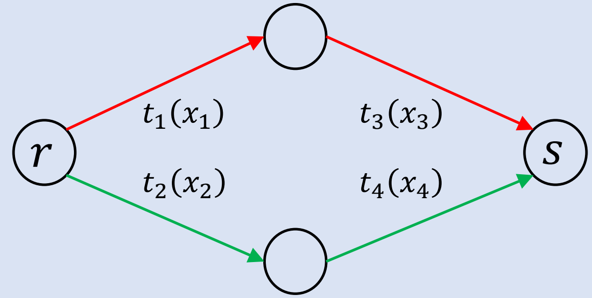
　もはやどの利用者も経路を変更することによって自己の旅行時間をそれ以上短縮できない均衡状態

（前提条件）

- 全ての利用者は常に旅行時間最小化という同一の評価水準に基づき行動
- 利用者は利用可能な経路に関する完全な旅行時間情報を得ている

→　確定的な経路費用のみを考慮

$c_1^{rs} = t_1(x_1) + t_3(x_3)$



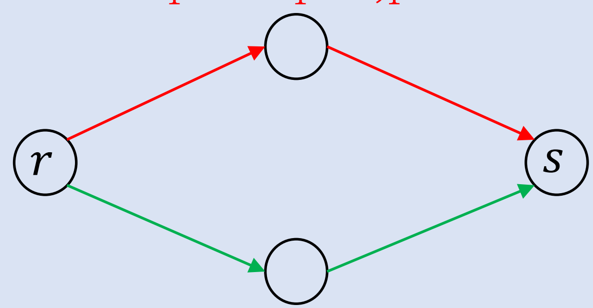
$c_2^{rs} = t_2(x_2) + t_4(x_4)$

- 確率的利用者均衡

　もはやどの利用者も経路を変更することによって自己の旅行時間をそれ以上短縮することはできないと信じている均衡状態

→　ランダム効用理論に基づき拡張された利用者均衡
　　利用者の認知誤差を考慮

$U_1^{rs} = -c_1^{rs} + \xi_1^{rs}$



$U_2^{rs} = -c_2^{rs} + \xi_2^{rs}$

確率的配分モデル

➢ 確率的配分モデル

経路費用が一定（混雑なし）の場合の利用者の経路選択行動をランダム効用理論に基づく離散選択モデルで表現する

- 一般的な定式化

効用関数：$U_k^{rs} = -c_k^{rs} + \xi_k^{rs}$

$\left(\begin{array}{l} U_k^{rs}: \text{OD ペア} rs \text{の} k \text{番目の経路の効用} \\ \xi_k^{rs}: \text{利用者の認知誤差を表す確率変数} \end{array} \right)$

ランダム効用理論

選択確率：$P_k^{rs} = Pr.\left[U_k^{rs} \geq \max_{k' \neq k} \{ U_{k'}^{rs} \} \middle| \boldsymbol{t} \right]$

$= Pr.\left[c_k^{rs} - \xi_k^{rs} \leq \min_{k' \neq k} \{ c_{k'}^{rs} - \xi_{k'}^{rs} \} \middle| \boldsymbol{t} \right]$

←一旦P_k^{rs}が定まると

f_k^{rs}は二項分布：$f_k^{rs} \sim B(q_{rs}, P_k^{rs})$に従う

配分交通量の確率特性：

$$E[f_k^{rs}] = q_{rs} P_k^{rs}$$

$$Var[f_k^{rs}] = q_{rs} P_k^{rs} (1 - P_k^{rs})$$

$$Cov[f_k^{rs}, f_{k'}^{rs}] = -q_{rs} P_k^{rs} P_{k'}^{rs}$$

- フローの保存則

$$\sum_k E[f_k^{rs}] = q_{rs}$$

$$E[x_a] = \sum_{rs} \sum_k E[f_k^{rs}] \delta_{a,k}^{rs}$$

- 具体的な定式化

a)誤差項の確率分布

- 正規分布→プロビット・モデル
- Weibull分布→ロジット・モデル

(ex) 互いに独立なWeibull分布$W(0, \theta)$

$$E[f_k^{rs}] = q_{rs} \frac{\exp(-\theta c_k^{rs})}{\sum_{k' \in K_{rs}} \exp(-\theta c_{k'}^{rs})}$$

b)対象とする経路集合※詳しくは9章

- Simple path(同一リンクを二度以上通過しない)の集合
- ある規則でSimple path集合をさらに限定した集合
- 限定なしの全ての可能経路集合

等を決める必要がある

以降、期待値計算は

$E[f_k^{rs}] \rightarrow f_k^{rs}$ のように表す

確率的配分モデル

➢ 期待最大効用

ランダム効用理論では意思決定者が選択行動によって得ると認知する効用は$\max_k\{U_k\}$

→ 確率変数であるため確定的に評価は不可、確率分布・期待値で評価される

最大効用の期待値：$S^* = E[\max_k\{U_k = V_k + \varepsilon_k\}]$

ロジット・モデルの場合

$\varepsilon_k \sim EV(\eta, \theta)$

$V'_k = V_k + \eta$

$U_k \sim EV(V'_k, \theta)$

$U^* = \max_k\{U_k\} \sim EV\left(\frac{1}{\theta} ln \sum_{k=1}^{K} \exp(\theta V'_k), \theta\right)$

$$S^*(\boldsymbol{V}) = \frac{1}{\theta} ln \sum_{k=1}^{K} \exp(\theta V_k) + \eta + \frac{\gamma}{\theta}$$

代表的性質：

1. 確定効用$\boldsymbol{V}$に対する期待最大効用の変化率が選択確率となる：$\frac{\partial S^*(\boldsymbol{V})}{\partial V_k} = P_k(\boldsymbol{V})$
2. 確定効用$\boldsymbol{V}$に関して連続・微分可能な狭義凸関数である
3. 選択肢集合中のどの効用よりも大きい：$S^*(\boldsymbol{V}) \geq \max_{k \in K}\{V_k\}$
4. 選択肢集合のサイズに関して単調増加関数：$S^*(V_1, V_2, \dots, V_k, V_{k+1}) \geq S^*(V_1, V_2, \dots, V_k)$
5. $\frac{\partial S^*(\boldsymbol{V})}{\partial \beta_i} = E_{\boldsymbol{P}}[\boldsymbol{a_i}]$
6. $\frac{\partial S^*(\boldsymbol{V})}{\partial \beta_i} = Var_{\boldsymbol{P}}[\boldsymbol{a_i}]$

$\left(V_k = \sum_k \beta_i\, a_{i,k}\right)$

確率的配分モデル

➢ 期待最小費用

効用最大化 ⇔ 費用最小化

確率的な認知費用：$\tilde{c}_k^{rs} \equiv -U_k^{rs} = c_k^{rs} - \xi_k^{rs}$を最小化

$$S_{rs}(\boldsymbol{c}^{rs}) \equiv E\left[\min_{k \in K_{rs}} \{\tilde{c}_k^{rs}\}\right] = \boxed{-S^*(-\boldsymbol{c}^{rs})}$$

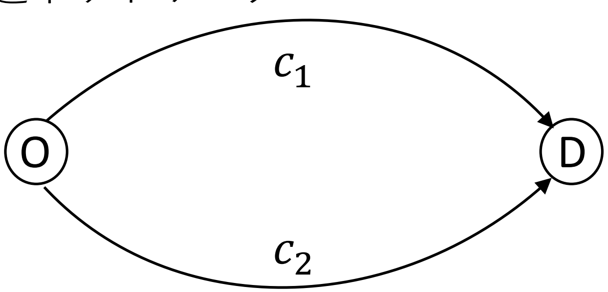
期待最大効用の符号を逆転させた量

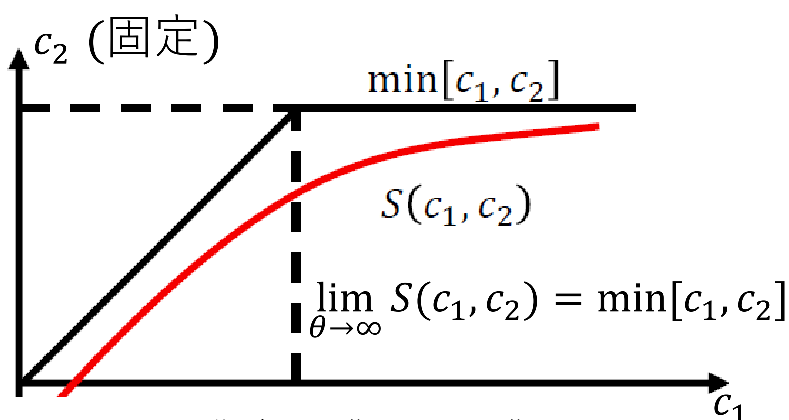
ロジット・モデルの場合

$$S_{rs}(\boldsymbol{c}^{rs}) = \frac{1}{\theta} \ln \sum_{k \in K_{rs}} \exp(-\theta \boldsymbol{c}^{rs})$$

最小費用関数min{$\boldsymbol{c}$}を一般化したもの

例題ネットワーク：





図：期待最小費用と最小費用

エントロピー・モデル

➢ 経路交通量と状態

経路交通量 ← 個々の利用者の経路選択の集計結果

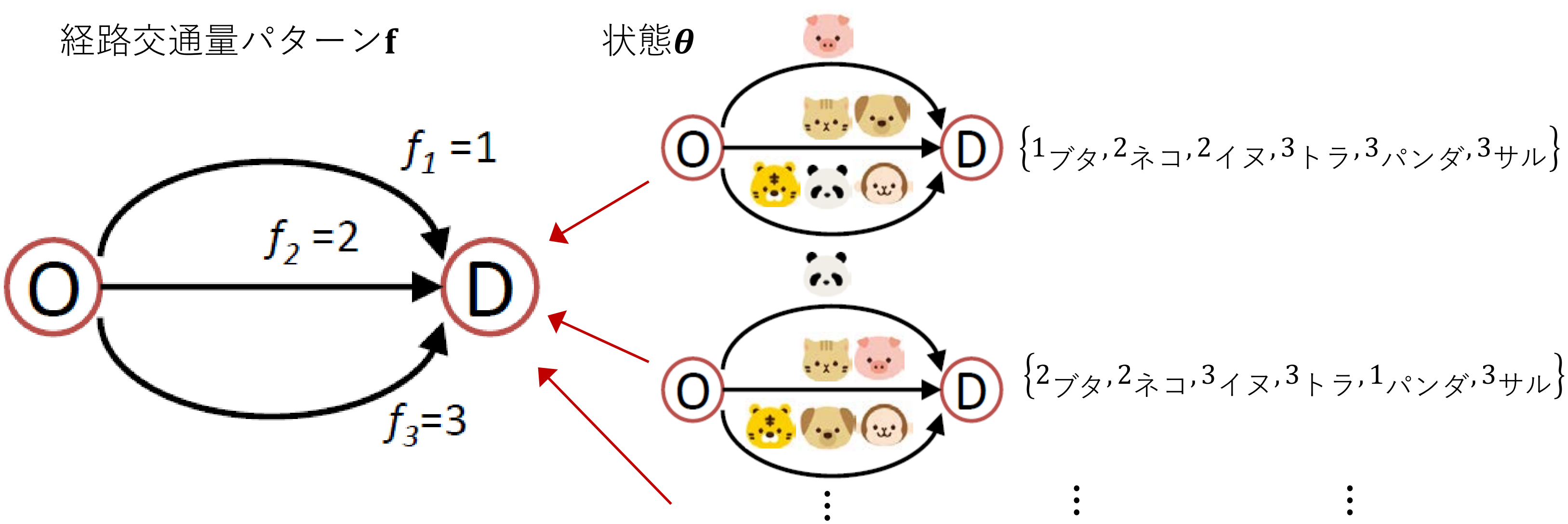
全利用者の経路選択パターン$\boldsymbol{\theta} = \{\dots, n_i, \dots\}$をシステムの”状態”と呼ぶ

n_i：利用者iの経路選択結果（経路番号）

経路交通量パターン$\mathbf{f}$ ← 状態 $\theta_{\mathbf{f}}^{1}$, 状態 $\theta_{\mathbf{f}}^{2}$, ⋮, 状態 $\theta_{\mathbf{f}}^{N(\mathbf{f})}$ $\}$ $N(\mathbf{f})$個の状態

例題ネットワーク：

経路交通量パターン$\mathbf{f}$　　　状態$\boldsymbol{\theta}$



状態数$N(\mathbf{f}) = {}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = 60$

エントロピー・モデル

➢ エントロピー・モデル

各状態$\{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \ldots\}$が同確率で生成すると仮定すると、対応する状態数が最大の経路交通量パターン$\mathbf{f}^*$が最も起こりやすい

OD交通量q_{rs}が与えられたとき、
交通量パターン$\mathbf{f}$に対応する状態数$N(\mathbf{f})$は

$$N(\mathbf{f}) = \prod_{rs} \frac{q_{rs}!}{\prod_k f_k^{rs}!}$$

$N(\mathbf{f})$の対数の最大化によって
最も生成されやすい交通量パターン$\mathbf{f}^*$を求める

＊最適化問題＊

目的関数：

$$\max.\quad \ln N(\mathbf{f}) = \sum_{rs} \left\{ \ln q_{rs}! - \sum_k \ln f_k^{rs}! \right\}$$

Stirlingの公式：$\ln x! \sim x \ln x - x$

$$\max.\quad \ln N(\mathbf{f}) = \sum_{rs} \left(q_{rs} \ln q_{rs} - \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \right)$$

q_{rs}は所与（定数）

$$\max.\quad Z(\mathbf{f}) = -\sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs}$$

$P_k^{rs} \equiv f_k^{rs} / q_{rs}$

制約条件：

$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs}$（フローの保存則）

$f_k^{rs} > 0$（非負条件）

最適解$\mathbf{f}^*$：

$$f_k^{rs} = \frac{q_{rs}}{K_{rs}}$$

→ネットワークの総走行費用の制約がない場合
各経路に均等に交通量が配分される

||

経路選択の不確実性を最大化している

エントロピー関数：$H_{rs}(\mathbf{P}) = -\sum_k P_k^{rs} \ln P_k^{rs}$

$\max.\ H(\mathbf{P}) = H(1/K, \ldots, 1/K) = \ln K$

$\min.\ H(\mathbf{P}) = H(1,0,\ldots,0) = \cdots = 0$

→不確実性を表す指標となっている

$\sum_{rs} H_{rs}(\mathbf{P})$の最大化と等価

エントロピー・モデル

- エントロピー・モデル（エントロピー最大化モデル）

ネットワーク全体の総走行費用がたかだか$\hat{E}$であることが観測によりわかっているとき

観測情報に整合的で最も生成しやすい
交通量パターンを求める最適化問題

$$\max. \quad Z(\mathbf{f}) = -\sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} \ln f_k^{rs}$$

Sub. to

$$\sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} c_k^{rs} \leq \hat{E}$$

$$q_{rs} = \sum_{k} f_k^{rs} \;, \; f_k^{rs} > 0$$

最短経路配分や全くランダムな配分のような極端な交通量パターンではなく、それらの中間的な交通量パターンが最適解として求まる

- 解の唯一性

・最大化目的関数が狭義凹関数
↑エントロピー関数のHessianは負定値行列

エントロピー関数：$H(\mathbf{P}) = -\sum_k P_k \ln P_k$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial P_l \partial P_m} = \begin{cases} -1/P_l & (l = m) \\ 0 & (l \neq m) \end{cases}$$

$$\mathbf{r}^T \nabla^2 H \mathbf{r} = -\sum_k r_k^2 / P_k < 0$$ ($\mathbf{r}$: 任意の実数ベクトル)

・ $\mathbf{f}$の許容領域が閉凸集合
↑制約条件式は線形式，非負条件のみ

・ $\mathbf{f}$の許容領域が有界
↑制約条件式が示す$\mathbf{f}$の許容領域は有界（サイクリックな経路を考慮しない場合）

エントロピー・モデル

➢ エントロピー・モデルとロジットモデルの等価性

【Lagrangianを用いた最適化問題】

$$\max.\quad L(\mathbf{f},\theta,\boldsymbol{\eta}) = Z(\mathbf{f}) + \theta\left\{\hat{E} - \sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} c_k^{rs}\right\} + \sum_{rs}\eta_{rs}\left\{q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs}\right\}$$

Sub. to $\quad f_k^{rs} \geq 0, \theta \geq 0$

Kuhn-Tucker条件

$$f_k^{rs}\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0 \;\; and \;\; \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} \leq 0$$

$$(\forall k \in K_{rs}, \forall rs \in \Omega)$$

$$\theta \geq 0, \quad \sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} c_k^{rs} \leq \hat{E}, \quad q_{rs} = \sum_{k} f_k^{rs}, \quad f_k^{rs} \geq 0$$

$$f_k^{rs} = q_{rs}\frac{\exp(-\theta c_k^{rs})}{\sum_k \exp(-\theta c_k^{rs})}$$

⟷ ロジットモデルと等価

θ = (総走行費用制約式の$Lagrange$乗数)

→最適化問題を解くと$\hat{E}$に応じたθが自動的に求まる

⟷ ロジットモデルでは外生的に与える

エントロピー・モデル

- コスト最小化モデル

エントロピーの観測値$\hat{H}$を与える

$$\min. Z(\mathbf{f}) = \sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} c_k^{rs}$$

sub.to $$q_{rs} = \sum_{k} f_k^{rs},\ f_k^{rs} \geq 0,\ -\sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \geq \hat{H}$$

- エントロピー・コスト調和モデル

経路選択のばらつきを示すパラメータθを与える

$$\min. Z(\mathbf{f}) = \sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} c_k^{rs} + \frac{1}{\theta}\sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} \ln f_k^{rs}$$

sub.to $$q_{rs} = \sum_{k} f_k^{rs},\ f_k^{rs} \geq 0,$$

➡ いずれも配分結果はロジットモデルと等価になる

- 各エントロピーモデルの比較

→ エントロピー最大化モデルとコスト最小化モデルではそれぞれ$\hat{E}$と$\hat{H}$を観測により推定する必要がある

サンプリングのバイアスが無い場合 $\mathbf{f}^* = E[\tilde{\mathbf{f}}]$ （$\tilde{\mathbf{f}}$ ：観測交通量パターン、$\mathbf{f}^*$ ：$\mathbf{f}$の不偏推定値）

- エントロピー最大化モデル

$$E\left[\hat{E}\left(\tilde{\mathbf{f}}\right)\right] = \hat{E}(\mathbf{f}^*)$$

- コスト最小化モデル

$$E\left[\hat{H}\left(\tilde{\mathbf{f}}\right)\right] < \hat{H}(\mathbf{f}^*)$$

観測による推定値

コスト最小化モデルでは$\hat{H}$が過少推定となるバイアスが生じる
加えて推定値の分散がエントロピー最大化モデルより大きくなることが知られている

➡ 不偏性・効率性： エントロピー最大化モデル ＞ コスト最小化モデル

確率的利用者均衡配分の定式化

- 確率的利用者均衡状態

　もはやどの利用者も経路を変更することによって自己の旅行時間をそれ以上短縮することはできないと信じている均衡状態

観測リンクコスト：　$C_i = C_i(f_i)$

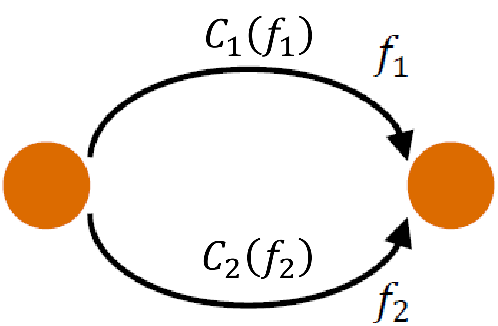
経路選択確率：　$P_i = Prob.\{C_i + \xi_i \le C_j + \xi_j\}$

経路交通量（期待値）：　$f_i = qP_i$

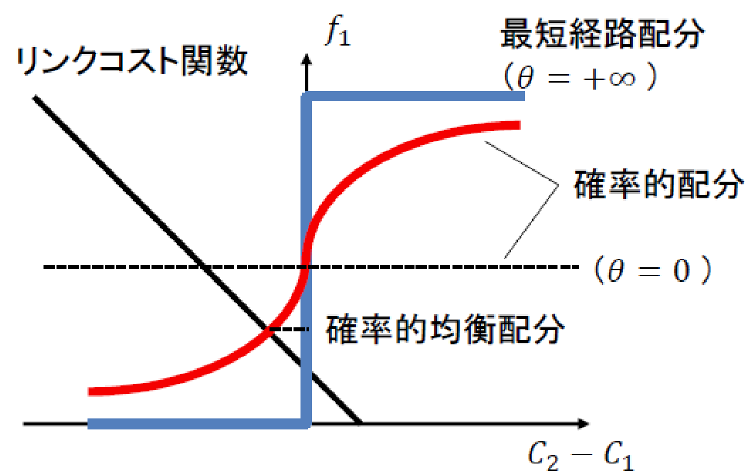
<u>確率的利用者均衡状態</u>

これらの条件が同時に成立している状態へと収束した定常状態

- 例題ネットワーク



確率的均衡配分



確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

➢ 等価な最適化問題

確率的利用者均衡配分 → $\boxed{\text{確率的配分}}$ ＋ Wardrop均衡配分（p4）

→ P11~13の3つのエントロピー・モデル

- エントロピー・コスト調和モデル

$$\min. Z(\mathbf{f}) = \sum_{a\in A}\int_0^{x_a} t_a(w)dw - \frac{1}{\theta}\sum_{rs} q_{rs}H_{rs}(\mathbf{f}^{rs}) \qquad \left(H_{rs}(\mathbf{f}^{rs}) \equiv -\sum_{rs}\sum_{k}\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\ln\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\right)$$

$$\text{sub.to} \quad \sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0 \ (\forall rs \in \Omega), \quad x_a = \sum_{k\in K_{rs}}\sum_{rs\in\Omega}\delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs} \ (\forall a \in A), \quad f_k^{rs} \geq 0, x_a \geq 0$$

⇨ エントロピー最大化モデル・コスト最小化モデルでも同様に最適化問題を考えることができる

配分交通量$(\mathbf{f}^*, \mathbf{x}^*)$が一意に求まる

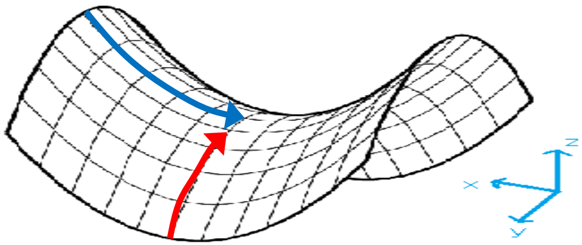
更に均衡解は次の式を満たす

$$f_k^{rs} = q_{rs}\frac{\exp(-\theta c_k^{rs}[\mathbf{x}(\mathbf{f})])}{\sum_k \exp(-\theta c_k^{rs}[\mathbf{x}(\mathbf{f})])}$$

これら3つの最適化問題の均衡解はp11~12と同じ議論により，いずれも解の一意性・ロジット型配分の式を満たしp14の定式化を表現できている

確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

- 双対問題
  → 同一の条件を異なる視点から定式化したもの
  （厳密な理解は参考文献でお願いします…）
  （ex）主問題：利潤最大化　↔　双対問題：費用最小化



- 双対問題からみた確定的/確率的均衡配分

p15のエントロピー・コスト調和モデルを用いた最適化問題から$(\mathbf{f},\mathbf{x})$を消去し整理
（『交通ネットワークの均衡分析』p89~90）

確率的均衡

$$\min. Z_D(\mathbf{t}) = -\sum_{a\in A}\int_{t_a(0)}^{t_a} x_a(v)dv + \sum_{rs} q_{rs}S_{rs}(\mathbf{c}^{rs}(\mathbf{t})) \quad \left(S_{rs}(\mathbf{c}^{rs}) \equiv -\frac{1}{\theta}\ln\sum_k \exp(-\theta c_k^{rs})\right)$$

期待最小費用関数（p8）

確定的均衡（『交通ネットワークの均衡分析』p60）

$$\min. Z_D(\mathbf{t}) = -\sum_{a\in A}\int_{t_a(0)}^{t_a} x_a(v)dv + \sum_{rs} q_{rs}\min_k\{\mathbf{c}^{rs}(\mathbf{t})\}$$

最小費用関数

- 一般のランダム効用理論モデルに基づいた配分

  → 期待最小費用関数をモデルに適した関数形にすれば良い
  交通量を未知変数とする等価最適化問題はあくまでロジットモデルを前提としたもの

確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

- 双対問題の応用 – 料金設定問題

任意の交通量パターン$\bar{\mathbf{x}}$を達成する料金設定問題を考える

経路交通量パターン$\mathbf{f}$： $f_k^{rs} = q_{rs} \dfrac{\exp\{-\theta(\omega c_k^{rs} + E_k^{rs})\}}{\sum_k \exp\{-\theta(\omega c_k^{rs} + E_k^{rs})\}}$

経路所要時間$\mathbf{c}$：$c_k^{rs} = \sum_a t_a(\overline{x_a})\delta_{a,k}^{rs}$　経路料金$\mathbf{E}$： $E_k^{rs} = \sum_a e_a \delta_{a,k}^{rs}$

フロー保存条件：$\overline{x_a} = \sum_{rs}\sum_k f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}$ （e_a: リンクaの所要料金　ω: 時間価値）

これらが同時に成立するようなリンク料金$\mathbf{e}$を求める

$$\max.\, Z_D(\mathbf{c}) = -\sum_a \overline{x_a}\widehat{c_a} + \sum_{rs} q_{rs} S_{rs}(\mathbf{c}^{rs}(\hat{\mathbf{c}}))$$

一般化コスト： $\widehat{c_a} = \omega t_a + e_a$

$\hat{\mathbf{c}}$を$\hat{\mathbf{c}}^*$としてこの最適化問題を$\mathbf{x}$について解くと$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$は上の条件を全て満たし，唯一の均衡解となっている

最適料金： $e_a^* = \widehat{c_a}^* - \omega t_a(\overline{x_a})$ ← 一意性はない

交通量パターン$\bar{\mathbf{x}}$を達成する料金設定は複数存在する

確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

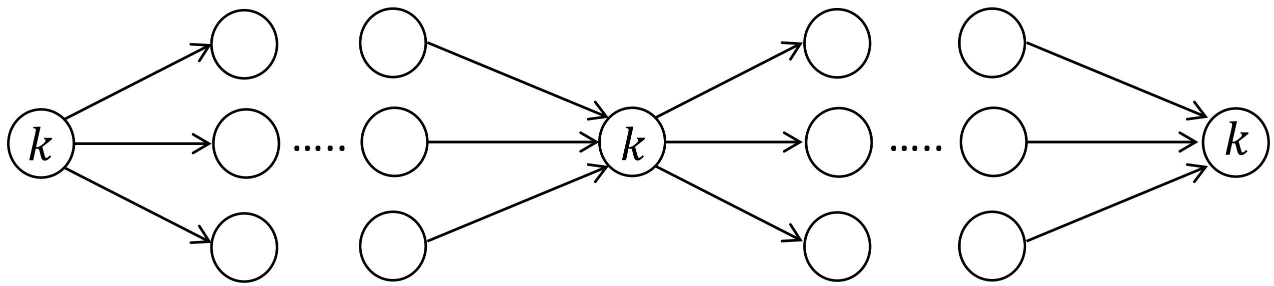
- 等価最適化問題のリンク変数による表現

一般的なネットワークでは経路列挙が難しいため，数値計算のためには経路交通量を用いた定式化はあまり望ましくない

リンク交通量を用いて定式化
詳しくは参考文献

フローの保存条件：

$$(F_k \equiv) \sum_i x_{ik}^r - \sum_j x_{kj}^r + \sum_s (q_{rs}\delta_{rk} - q_{rs}\delta_{sk}) = 0 \quad (\forall k \in N, \forall r \in R)$$



$$F_k = 0 - \sum_j x_{rj}^r + \sum_s q_{rs} \qquad F_k = \sum_i x_{ik}^r - \sum_j x_{rj}^r \qquad F_k = \sum_i x_{ik}^r - 0 - q_{rs}$$

$$\min. Z(\mathbf{x}) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(w)dw - \frac{1}{\theta}\sum_r \{HL(\mathbf{x}^r) - HN(\mathbf{x}^r)\}$$

$$\text{sub. to} \quad x_{ij} = \sum_r x_{ij}^r \ (\forall i,j \in A), x_{ij} \geq 0 (\forall i,j \in A, \forall r \in R)$$

$$HN(\mathbf{x}^r) \equiv -\sum_j \left(\sum_i x_{ij}^r\right) \ln \left(\sum_i x_{ij}^r\right)$$

$$HL(\mathbf{x}^r) \equiv -\sum_{ij} x_{ij}^r \ln x_{ij}^r$$

確率的利用者均衡配分の解法

➢ 等価最適化問題の計算アルゴリズム

確率的配分の解法

＊ロジット型確率的配分
- Dialのアルゴリズム
  → 経路を限定
- Markov連鎖配分
  → 経路を限定しない

経路列挙せず，リンク交通量を直接計算するアルゴリズム

＊プロビット型確率的配分
- モンテカルロシミュレーション

均衡配分の解法

＊逐次平均法（MSA：Method of Successive Averages）
- 各種配分モデルに対するSUE配分に適用化
- 収束が遅い

＊部分線形化法
- 起点別リンク交通量を未知変数とする
- ロジット型SUE配分のみ適用化
- 収束が速い

＊Simplicial Decomposition法
- 経路交通量を未知変数とする
- ロジット型SUE配分のみ適用化
- 収束が速い

これらの組み合わせにより確率的利用者均衡配分の均衡解が計算できる

確率的利用者均衡配分の解法

- 逐次平均法（MSA：Method of Successive Averages）

Frank-Wolfe法（第10回）で予め定数列をステップサイズとする
目的変数に経路変数が含まれているとステップサイズの一次元探索ができない

Step A

n回目の計算ステップにおいて与えられたリンク交通量ベクトルの点$x^{(n)}$
において目的関数を部分的（積分項）に線形近似し制約条件下で最小化

Step B

0. 初期許容解を求める
繰り返し回数: $n = 0$, リンクコスト:$t_{ij}{}^{(0)} = t_{ij}(\mathbf{0})$
確率的配分を行い$\mathbf{x}^{(0)}$を得る

1. リンクコスト更新

$$t_{ij}{}^{(n)} = t_{ij}(x_{ij}^{(n)})$$

2. 降下方向ベクトルの計算
リンクコスト$\boldsymbol{t}^{(n)}$に対して確率的配分を行い，配分結果のリンク交通量
パターン$\mathbf{y}^{(n)}$を用いて降下方向ベクトル$\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{y}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n)}$を計算

3. 一次元探索
ステップサイズを$\alpha = \frac{1}{n}$で与える

4. 解の更新

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \alpha\mathbf{d}^{(n)}$$

5. 収束判定
収束していれば終了，そうでなければ$n = n + 1$とし1.へ

確率的利用者均衡配分の解法

- Markov連鎖配分（MCA : Markov Chain Assignment）

  g個の起点，a個の終点を含むn個のノードからなるネットワークを考える

  MCAでは各ノードがMarkov連鎖における“状態”に対応し，車は始点からマルコフ連鎖則に従って分岐を繰り返し，終点に到着すると確率1で吸収される

  またMCAでは対象経路を全く限定せず，cycleを含む全ての経路を考えている

推移確率行列：$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & n-a \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} a \\ n-a \end{array}$ $\quad \mathbf{Q} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g & n-g-a \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Q_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q_2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} g \\ n-g-a \end{array}$

Markov連鎖では最初の時点で状態iにいた車がn回の状態遷移後に状態jにいる確率は$\mathbf{Q}^n$の(i,j)要素$(=p(j|i))$で与えられる

起点から発生した車が各ノードにいる確率は

$$\mathbf{I} + \mathbf{Q}^1 + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^n + \cdots = [\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Q_1}[\mathbf{I} - \mathbf{Q_2}]^{-1} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{I} - \mathbf{Q_2}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} g \\ n-g-a \end{array}$$

リンクijの選択率は，ノードiの選択率を$P(i)$として

$$p_{ij} = P(i)p(j|i)$$

確率的利用者均衡配分の解法

- ロジットモデルと整合的な推移確率

推移確率を以下の式で与えれば，MCAによるフローパターンはロジット型確率的配分と等価になる

$$p(j|i) = \exp\left(-\theta t_{ij}\right)\frac{V_{js}}{V_{is}} \quad \left(V_{is} = \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\theta c_k^{is}]\right)$$

$$P_k^{rs} = \prod_{ij} p(j|i)^{\delta_{ij,k}^{rs,n}} = \frac{\exp[-\theta c_k^{rs}]}{\sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\theta c_k^{rs}]}$$

$$\left(\delta_{ij,k}^{rs,n} = \begin{cases} n & OD\text{ペア}rs\text{の}k\text{番目の経路がリンク}ij\text{を}n\text{回通過} \\ 0 & otherwise \end{cases}\right)$$

⇒ V_{ij}を要素とする行列$\mathbf{V}$の評価が必要だが，経路を列挙するような直接的な方法では評価できない

確率的利用者均衡配分の解法

- 経路を限定しないロジット型配分の計算法

VをMCAに類似した行列演算により評価

重み行列**W**：$w_{ij} = \begin{cases} \exp[-\theta t_{ij}] & \text{ノード}ij\text{間にリンクが存在} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

$$\mathbf{W}^n : w_{ij}^{[n]} = \sum_{k \in K_n^{ij}} \exp[-\theta c_{k,n}^{ij}]$$

K_n^{ij}: n本のリンクを通過してノードi, jを結ぶ経路の集合
$c_{k,n}^{ij}$: K_n^{ij}に属するk番目の経路のコスト

Vを**W**を用いて表すと

$$V_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\theta c_k^{ij}] \longrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{W}^2 + \cdots$$

Wが収束条件（Hawkins-Simon条件）を満足していると仮定すると

$$\mathbf{V} = [\mathbf{I} - \mathbf{W}]^{-1} - \mathbf{I}$$

確率的利用者均衡配分の解法

- 経路を限定しないロジット型配分の計算法

$\mathbf{V}$をMCAに類似した行列演算により評価

重み行列$\mathbf{W}$：$w_{ij} = \begin{cases} \exp[-\theta t_{ij}] & \text{ノード}ij\text{間にリンクが存在} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

$$\mathbf{W}^n : w_{ij}^{[n]} = \sum_{k \in K_n^{ij}} \exp[-\theta c_{k,n}^{ij}]$$

K_n^{ij}: n本のリンクを通過してノードi, jを結ぶ経路の集合
$c_{k,n}^{ij}$: K_n^{ij}に属するk番目の経路のコスト

$\mathbf{V}$を$\mathbf{W}$を用いて表すと

$$V_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\theta c_k^{ij}] \longrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{W}^2 + \cdots$$

$\mathbf{W}$が収束条件（Hawkins-Simon条件）を満足していると仮定すると

$$\mathbf{V} = [\mathbf{I} - \mathbf{W}]^{-1} - \mathbf{I}$$

確率的利用者均衡配分の解法

- ロジット型確率的配分の手順まとめ

Step 1　推移確率$\mathbf{Q}$の計算

$\mathbf{V} = [\mathbf{I} - \mathbf{W}]^{-1} - \mathbf{I}$の逆行列計算により$\mathbf{V}$を計算

$$p(j|i) = \exp(-\theta t_{ij}) \frac{V_{js}}{V_{is}}$$ により推移確率$\mathbf{Q}$を計算

Step 2　Markov配分によりリンク選択率を計算

$$\mathbf{I} + \mathbf{Q}^1 + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^n + \cdots = [\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Q_1}[\mathbf{I} - \mathbf{Q_2}]^{-1} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{I} - \mathbf{Q_2}]^{-1} \end{bmatrix}$$

起点別ノード選択率行列から計算

リンク選択率：$p_{ij} = P(i)p(j|i)$ を計算

ノード選択率：$P^{rs}(i) = V_{ri}V_{is}/V_{rs}$

リンク選択率：$p_{ij} = (p(j|i)V_{ri}V_{is})/V_{rs} = V_{ri}w_{ij}V_{js}/V_{rs}$

リンク交通量：$y_{ij} = q_{rs}p_{ij} = q_{rs}V_{ri}w_{ij}V_{js}/V_{rs}$

確率的利用者均衡配分の解法

- 大規模ネットワークのための計算法

実際の数値計算で～p25で説明した方法を行うには膨大な記憶容量と計算時間を要する

$$y_{ij} = q_{rs}p_{ij} = q_{rs}V_{ri}w_{ij}V_{js}/V_{rs}$$ ← リンク交通量を計算するために行列**V**の全ての要素が必要なわけではない

⇒ V_{ri}, V_{js}（リンク起終点がそれぞれ発生・集中ノード）が計算できれば良い

p25の方程式を起点別（or終点別）に分解して解く

<u>Step 1</u>　行列$\mathbf{W} = [W_{ij}]$の設定

$$W_{ij} = \exp\left[-\theta t_{ij}\right] \ \ (\forall(i,j) \in A)$$

↓

<u>Step 2A</u>　各起点$r \in R$について以下の線形連立方程式を解き，$\mathbf{V}_r = [V_{r1}, \dots, V_{rn}]$を算出

$$[\mathbf{I}-\mathbf{W}]^T\mathbf{V}_r^T = \mathbf{W}_r^T \quad \left(\sum_i (\delta_{ij} - W_{ij})V_{ri} = W_{rj}\right)$$

↓

<u>Step 2B</u>　各起点$s \in S$について以下の線形連立方程式を解き，$\mathbf{V}_s = [V_{1S}, \dots, V_{ns}]^T$を算出

$$[\mathbf{I}-\mathbf{W}]\mathbf{V}_s = \mathbf{W}_s \quad \left(\sum_j (\delta_{ij} - W_{ij})V_{js} = W_{is}\right)$$

→

<u>Step 3</u>　$\mathbf{V}_{rs} = [V_{rs}]$を算出

$V_{rs} = V_{rj'}$ (j'はsに接続するノード)

↓

<u>Step 4</u>　リンク交通量を計算

$$y_{ij} = q_{rs}V_{ri}w_{ij}V_{js}/V_{rs}$$

確率的利用者均衡配分の解法

➢ Markov連鎖配分の問題点

- ネットワークの構造によっては，非常に非現実に過大なcycle flowが発生する
- 行列**W**の収束条件が満たされず解が発散する
  ↑非常に小さいコストを持つリンクが接続してcycleを形成する場合に起こりやすい

- IIA特性が増幅される場合がある（細街路と1本のバイパスからなるネットワークを考えると，経路数が多い細街路が過剰推計される）
  ↑均衡配分を考えることで緩和される

参考文献

- 土木学会 土木計画学研究委員会(1998):「交通ネットワークの均衡分析―最新の理論と解法―」第6章, 土木学会.