

第6章 確率的利用者均衡モデル

- 6.1 確率的配分モデル
- 6.2 エントロピーモデルとロジットモデル
- 6.3 確率的利用者均衡配分とその定式化
- 6.4 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題
- 6.5 リンク間に相互干渉がある場合の確率的利用者均衡配分

福田研究室 修士1年 平林新

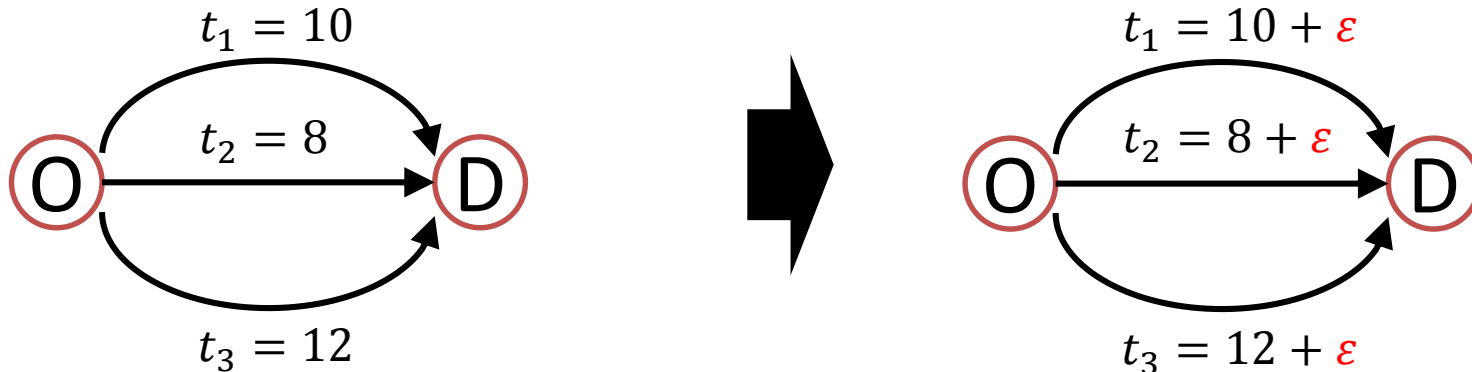
はじめに

5章: **確定的**利用者均衡(UE: User Equilibrium)

すべての利用者がネットワーク状況について**完全な情報**をもち、最短経路を選択

6章: **確率的**利用者均衡(SUE: Stochastic User Equilibrium)

利用者の経路選択行動の**ばらつき(認知誤差)** & **混雑状況**を考慮



6.1: ランダム効用理論によって利用者の経路選択を表現(右図)

6.2: 確率的配分モデル(6.1)を最適化問題として表現(利用者行動の不確定性を表現)

6.3: 確率的配分と利用者均衡を統合した確率的利用者均衡配分(混雑現象を考慮)

6.4: 確率的利用者均衡配分モデル(6.3)を最適化問題として表現

6.5: 確率的利用者均衡配分モデル(リンク間相互作用あり)を変分不等式問題として表現

はじめに

省略語の説明

- SUE: Stochastic User Equilibrium (確率的利用者均衡)
 UE: User Equilibrium (利用者均衡)
 FD: with Fixed Demand (需要固定)

モデル一覧

6.2

【SA-1】: エントロピーの最大化(総走行費用 \hat{E} の制約条件を外生的に与える)

【SA-2】: コストの最小化(エントロピー \hat{H} の制約条件を外生的に与える)
 (【SA-1】の目的関数と制約条件入れ替え)

【SA-3】: エントロピー最大+コスト最小の混合(調和)

6.4

【SUE/FD-path】: 【SA-3】の応用系(コスト関数が積分に)

【SUE/FD-path1】: 【SA-1】の応用系(コストの制約が積分に)

【SUE/FD-path2】: 【SA-2】の応用系(コスト関数が積分に)

【SUE/FD-Dual】: 【SUE/FD-path】の双対問題

【UE/FD-Dual】: 【UE/FD-Primal】(5章Wardrop均衡)の双対問題
 【SUE/FD-Dual】の期待最小費用を最小費用に

【SUE/FD-arc】: path形式でなくarc形式の【SUE/FD-path】の等価最適化問題

1. 確率的配分モデル

はじめに

確率的利用者均衡配分を理解するための準備段階として、ランダム効用理論に基づいた「確率的配分」から導入する。

確率的配分とは...

リンクコストがフローの量によって変化しない(混雑しない)という仮定のもとで、利用者の選択行動のばらつきを考慮した配分モデルのことである。

- 定式化
- 期待最大効用
- 期待最小費用

1. 確率的配分モデル

交通ネットワーク配分モデル

利用者の経路選択行動は離散的選択肢からの選択行動
 → ランダム効用理論(第4章)によって記述可能

ODペア(r, s)の k 番目経路の効用関数

$$U_k^{rs} = -c_k^{rs} + \xi_k^{rs} \quad (6.1)$$

c_k^{rs} は経路上のリンクコストの和なので、

$$c_k^{rs} = \sum_{ij} t_{ij} \delta_{ij,k}^{rs} \quad (6.2)$$

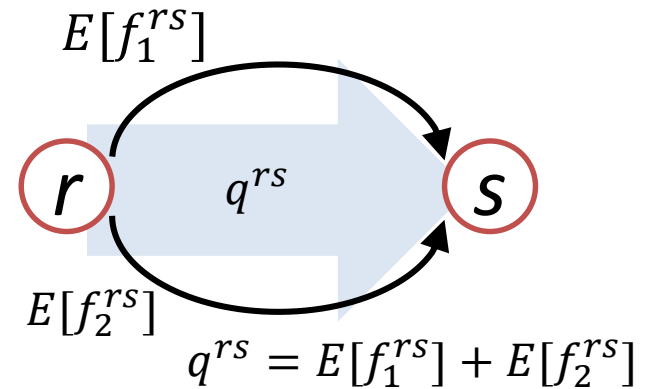
c_k^{rs} : 経路費用(k 番目ODペア(r, s))
 ξ_k^{rs} : 利用者の認知誤差を表す確率変数

t_{ij} : リンク ij のコスト
 $\delta_{ij,k}^{rs}$: リンク ij が経路 k に含まれる $\rightarrow 1$
 その他 $\rightarrow 0$

1. 確率的配分モデル

ODペア(r, s)の k 番目経路選択確率 P_k^{rs}

$$\begin{aligned} P_k^{rs} &= \Pr. \left[U_k^{rs} \geq \max_{k' \neq k} \{u_{k'}^{rs}\} \mid t \right] \\ &= \Pr. \left[-c_k^{rs} + \xi_k^{rs} \geq \max_{k' \neq k} \{-c_{k'}^{rs} + \xi_{k'}^{rs}\} \mid t \right] \\ &= \Pr. \left[c_k^{rs} - \xi_k^{rs} \geq \min_{k' \neq k} \{c_{k'}^{rs} - \xi_{k'}^{rs}\} \mid t \right] \quad (6.3) \end{aligned}$$



この経路の交通量 f_k^{rs} の期待値は

$$E[f_k^{rs}] = q_{rs} P_k^{rs} \quad (6.4)$$

経路交通量とOD交通量の間
のフロー保存則が満たされる

経路選択確率 P は以下を満たす

$$\sum_k P_k^{rs} = 1 \quad \forall(r, s) \quad (6.5)$$

$$\sum_k E[f_k^{rs}] = q_{rs} \quad \forall(r, s) \quad (6.6)$$

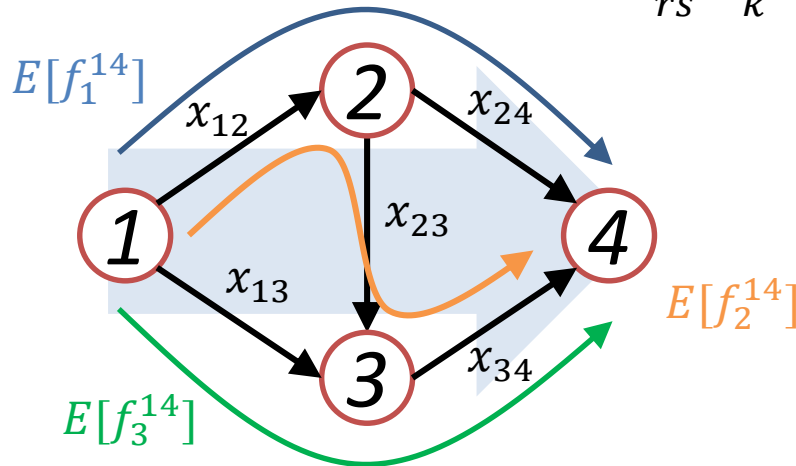
c_k^{rs} : 経路費用(ODペア(r, s))
 ξ_k^{rs} : 利用者の認知誤差を表す確率変数
 q_{rs} : フロー(OD交通量) (ODペア(r, s))
 f_k^{rs} : 経路の交通量(k 番目ODペア(r, s))

t_{ij} : リンク ij のコスト
 $\delta_{ij,k}^{rs}$: リンク ij が経路 k に含まれる $\rightarrow 1$
 その他 $\rightarrow 0$

1. 確率的配分モデル

リンク交通量の期待値 $E[x_{ij}]$ は、経路・リンク交通量の関係から

$$E[x_{ij}] = \sum_{rs} \sum_k E[f_k^{rs}] \delta_{ij,k}^{rs}$$



$$E[x_{12}] = E[f_1^{14}] + E[f_2^{14}]$$

$$E[x_{13}] = E[f_2^{14}]$$

$$E[x_{23}] = E[f_2^{14}]$$

$$E[x_{24}] = E[f_1^{14}]$$

$$E[x_{34}] = E[f_2^{14}] + E[f_3^{14}]$$

$$q_{14} = E[f_1^{14}] + E[f_2^{14}] + E[f_3^{14}]$$

以降では、経路交通量とリンク交通量の期待値をそれぞれ以下のように表す

$$E[f_k^{rs}] = \mathbf{f}$$

$$E[x_{ij}] = \mathbf{x}$$

q_{rs} : フロー(OD交通量) (ODペア (r, s))

f_k^{rs} : 経路の交通量(k 番目ODペア (r, s))

x_{ij} : リンク ij の交通量

$\delta_{ij,k}^{rs}$: リンク ij が経路 k に含まれる $\rightarrow 1$

その他

$\rightarrow 0$

1. 確率的配分モデル

確率的選択モデルをどのように決める？

- a) 誤差項の確率分布 → ロジット or プロビット (4章)
- b) 選択対象とする経路集合 → 9章で説明

ロジットモデル: Weibul分布 $W(0, \theta)$

ロジットモデルの場合経路交通量の期待値は、

$$f_k^{rs} = q_{rs} \exp[-\theta c_k^{rs}] / \sum_{k' \in K_{rs}} \exp[-\theta c_{k'}^{rs}] \quad (6.9)$$

プロビットモデル: 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

- ✓ 解析的に経路交通量の敷を与えることは出来ない
- ✓ 経路が多い場合には計算も困難

q_{rs} : フロー(OD交通量) (ODペア (r, s))

f_k^{rs} : 経路の交通量(k 番目ODペア (r, s))

c_k^{rs} : 経路費用

1. 確率的配分モデル

選択対象とする経路集合

1. 全ての *Simple path の集合
2. simple path の集合をさらに限定した経路の集合
3. 限定なしの全ての可能経路の集合

⇒計算アルゴリズムとも関連が深いため9章で説明

*simple path: 同一リンクを二度以上通過しない経路

1. 確率的配分モデル

期待最大効用

最大効用は確率変数であり、確定的に評価できない
→確率分布やその期待値は求められる

最大効用の期待値(集団の平均的満足度)は

$$S^* = E \left[\max_m \{U_m = V_m + \epsilon_m\} \right]$$

これは便益指標として用いられる

統合モデル(6.3節で紹介する)においてinclusive costと呼ばれ、モデル構造上重要な意味を持つ

次に、期待最大効用関数と、それを交通費用に置き換えて得られる期待最小費用関数の性質を確認する

1. 確率的配分モデル

期待最大効用関数 $S^*(V)$

期待最大効用は誤差項の分布を決めれば測定可能効用 V の関数となる
すべての誤差項が互いに独立で同一の分布 $W[\eta, \theta]$ に従うロジットモデルでは

$$S^*(V) = \frac{1}{\theta} \ln \sum_{k=1}^K \exp[\theta V_k] + \underbrace{\eta + \frac{\gamma}{\theta}}_{\text{誤差項の平均値}}$$

誤差項の平均値を0としても、選択確率(選択肢の効用の大小)は変化しないため

$$S^*(V) = \frac{1}{\theta} \ln \sum_{k=1}^K \exp[\theta V_k]$$

同様にすべての選択肢の効用に定数 a (観測可能) を加えると

$$S^*(V') = S^*(V) + a \quad V'_k \equiv V_k + a \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, K$$

1. 確率的配分モデル

その他の代表的性質

1. V に対する期待最大効用の変化率が選択確率となる: $\frac{\partial S^*(V)}{\partial V_k} = P_k(V)$
2. V に関して連続・微分可能な狭義凹関数である
3. 選択肢集合中のどの効用よりも大きい: $S^*(V) \geq \max\{V_k\}$
4. 選択肢集合のサイズに関して単調増加関数である

$$: S^*(V_1, \dots, V_k, V_{k+1}) \geq S^*(V_1, \dots, V_k)$$

更に確定項 V を $V_k = \sum_i \beta_i a_{i,k}$ と線形和で表すと、 $S^*(V)$ は以下の性質を持つ

5. $\frac{\partial S^*(V)}{\partial \beta_i} = \sum_k P_k a_{i,k} = E_P[\mathbf{a}_i]$
6. $\frac{\partial^2 S^*(V)}{\partial \beta_i^2} = \sum_k P_k a_{i,k}^2 - (\sum_k P_k a_{i,k})^2 = \text{Var}_P[\mathbf{a}_i]$

$a_{i,k}$: k 番目選択肢の i 番目属性の値
 β_i : i 番目属性に対するパラメータ

1. 確率的配分モデル

例えば代表的性質1は以下のように示せる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S^*(V)}{\partial V_k} &= \frac{\partial}{\partial V_k} \frac{1}{\theta} \ln \sum_{k=1}^K \exp[\theta V_k] \\
 &= \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial V_k} \ln \sum_{k=1}^K \exp[\theta V_k] \\
 &= \frac{1}{\theta} \frac{\frac{\partial}{\partial V_k} \sum_{k=1}^K \exp[\theta V_k]}{\sum_{k=1}^K \exp[\theta V_k]} \\
 &= \frac{1}{\theta} \frac{(0 + 0 + \dots + \theta \exp[\theta V_k] + \dots + 0)}{\sum_{k=1}^K \exp[\theta V_k]} \\
 &= \frac{1}{\theta} \frac{\theta \exp[\theta V_k]}{\sum_{k=1}^K \exp[\theta V_k]} \\
 &= \frac{\exp[\theta V_k]}{\sum_{k=1}^K \exp[\theta V_k]} \\
 &= P_k(V)
 \end{aligned}$$

1. 確率的配分モデル

期待最小費用

確率的な認知費用を $\tilde{c}_k^{rs} \equiv -U_k^{rs} = c_k^{rs} - \xi_k^{rs}$ とすると、
ODペア (r, s) の最小認知費用の期待値は

$$S_{rs}(c^{rs}) \equiv E \left[\min_{k \in R_{rs}} \{ \tilde{c}_k^{rs} \} \right] = \underline{-S_{rs}^*(-c^{rs})} \quad (6.10) \quad (6.11)$$

期待最大効用の符号を逆にしたもの

期待最大効用と同様に、ロジット型の確率的配分モデルでは、
期待最小費用関数 $S_{rs}(c^{rs})$ は

$$S_{rs}(c^{rs}) = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_{k \in R_{rs}} \exp[-\theta c_k^{rs}] \quad (6.12)$$

c_k^{rs} : 経路費用 (k 番目 ODペア (r, s))

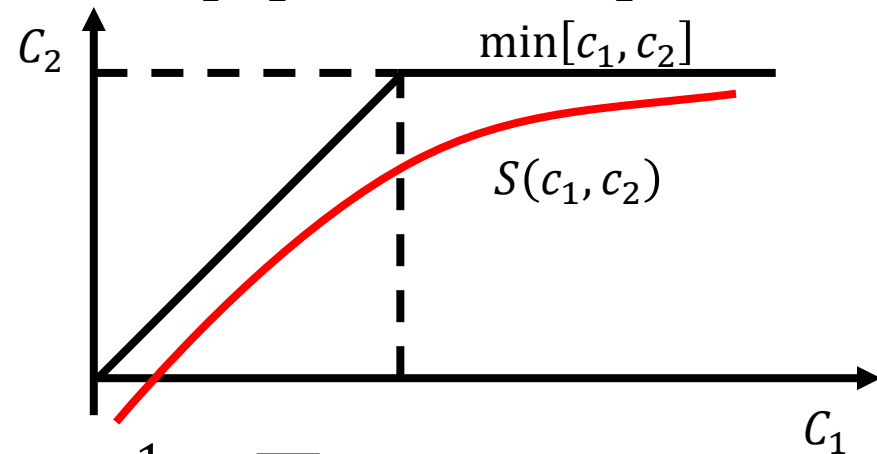
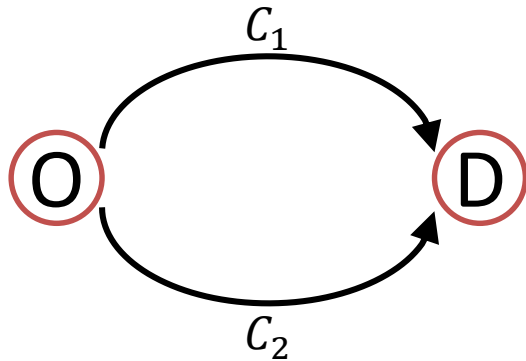
ξ_k^{rs} : 利用者の認知誤差を表す確率変数

1. 確率的配分モデル

期待最小費用関数 $S(c)$

以下の簡易ネットワークにおいて、

最小費用 $\min\{c_1, c_2\}$ と期待最小費用関数 $S(c_1, c_2)$ を比較する (c_2 を固定)



$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +\infty} S(c_1, c_2) &= \lim_{\theta \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\theta} \ln \sum_{k \in R_{OD}} \exp[-\theta c_k^{OD}] \\ &= \min[c_1, c_2] \end{aligned}$$

最小費用は期待最小費用のパラメータを $+\infty$ にした特殊な場合とみなせる

c_k^{rs} : 経路費用 (k 番目 OD ペア (r, s))

1. 確率的配分モデル

期待最小費用関数 $S(c)$

代表的性質

1. c に対する期待**最小**効用の変化率が選択確率となる： $\frac{\partial S^*(V)}{\partial c_k} = P_k(V)$
2. c に関して連続・微分可能な狭義凹関数である
3. 選択肢集合中のどの**費用**よりも**小さい**： $S^*(V) \geq \max\{V_k\}$
4. 選択肢集合のサイズに関して単調**減少**関数である
： $S^*(V_1, \dots, V_k, V_{k+1}) \geq S^*(V_1, \dots, V_k)$

これらの特性は、以降のモデル解析において利用される

次の2節では、本節で定式化したロジット型の確率的配分モデルを最適化問題として表現する

2. エントロピーモデルとロジットモデル

はじめに

前節(6.1)で定式化されたロジット型の確率的配分を、最適化問題として表現する。

ロジットモデルと等価な最適化問題について、統計力学や情報理論において用いられるエントロピーモデルの概念を用いた簡単な方法を示す。

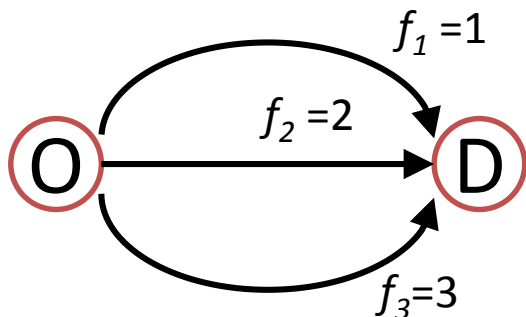
エントロピー...

熱力学における方向性のある現象の度合いを数値化したもの。例えば熱が温度の**高い方から低い方**に流れるが、その際移動できる熱の量を指す。(http://macasakr.sakura.ne.jp/entropy.html)

- エントロピーモデルの説明
- エントロピーモデルとロジットモデルの等価性
- 等価性を利用した他のモデル

2. エントロピーモデルとロジットモデル

経路交通量は個々の利用者の経路選択の結果を集計して得られる全利用者の選択経路のパターン $\{\dots, n_i, \dots\}$ をシステムの”状態”と呼ぶ
OD交通量6 ($f_1=1, f_2=2, f_3=3$)の配分が決まっていた場合



$$\{1_a, 2_b, 2_c, 3_d, 3_e, 3_f\}$$

$$\{1_a, 2_b, 3_c, 2_d, 3_e, 3_f\}$$

$$\vdots$$

$$\{3_a, 3_b, 3_c, 2_d, 2_e, 1_f\}$$

$${}_6C_1 * {}_5C_2 * {}_3C_3 = 60 \text{通りの状態が存在}$$

あるOD交通量 q_{rs} が与えられた時に各々のOD交通量 q_{rs} を経路交通量に分割する状態数Nは下式で与えられる

$$N(\mathbf{f}) = \prod_r \prod_s \frac{q_{rs}!}{\prod_k f_k^{rs}!} \quad \left(N(\mathbf{f}) = \frac{6!}{1! * 2! * 3!} \right) \quad (6.13)$$

各状態は同じ確率で生起すると仮定すると、

対応する状態数が最大の経路交通量パターンが最も起こりやすい(ルート3)

⇒ $N(\mathbf{f})$ の最大化によって、最も起こりやすい交通量パターンを求める

q_{rs} : フロー(OD交通量) (ODペア(r, s))

f_k^{rs} : 経路の交通量(k 番目ODペア(r, s))

2. エントロピーモデルとロジットモデル

$N(\mathbf{f})$ の対数の最大化

$$\max. \ln N(\mathbf{f}) = \sum_r \sum_s \left\{ \ln q_{rs}! - \sum_k \ln f_k^{rs}! \right\} \quad (6.14)$$

Stirlingの公式($\ln x! \approx x \ln x - x$)を用いて変形すると

$$\begin{aligned} \max. \ln N(\mathbf{f}) &= \sum_r \sum_s \left\{ (q_{rs} \ln q_{rs} - q_{rs}) - \sum_k (f_k^{rs} \ln f_k^{rs} - f_k^{rs}) \right\} \\ &= \sum_r \sum_s \left(\underline{q_{rs} \ln q_{rs}} - \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \right) \quad \because \sum_k E[f_k^{rs}] = q_{rs} \quad \forall (r, s) \end{aligned} \quad (6.15)$$

q は所与のため、 \mathbf{f} に関する項のみを考慮すればよい

$$\max. Z(\mathbf{f}) = - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \quad (6.16)$$

q_{rs} : フロー(OD交通量) (ODペア(r, s))

f_k^{rs} : 経路の交通量(k 番目ODペア(r, s))

2. エントロピーモデルとロジットモデル

ネットワーク全体の総走行費用がたかだか \hat{E} であることが分かっているとするとき、最も起こりやすい交通量パターンを求めるには以下の最適化問題を考える

$$\text{【SA-1】} \quad \max. Z(\mathbf{f}) = - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \quad (6.16)$$

$$\text{sub. to} \quad \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} \leq \hat{E} \quad (6.17)$$

$$q^{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.18)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in R_{rs}, \forall (r, s) \in W \quad (6.19)$$

この問題の目的関数 $Z(\mathbf{f})$ は経路交通量 \mathbf{f} を確率に置き換えればShannonのエントロピーと呼ばれる関数となる

$P_k^{rs} \equiv f_k^{rs} / q_{rs}$ とおくと、これは経路選択確率とみなせるので、あるODペアでの経路選択確率 \mathbf{P} のエントロピーは以下のように定義される

$$H_{rs}(\mathbf{P}) \equiv - \sum_k P_k^{rs} \ln P_k^{rs} \quad (6.20)$$

f_k^{rs} : 経路の交通量(k 番目ODペア(r, s))

c_k^{rs} : 経路費用(k 番目ODペア(r, s))

q_{rs} : フロー(OD交通量)

2. エントロピーモデルとロジットモデル

エントロピー関数を用いて【SA-1】の目的関数を表すと

$$\begin{aligned}
 Z(\mathbf{f}) &= - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \\
 &= - \sum_{rs} \sum_k P_k^{rs} q_{rs} \ln P_k^{rs} q_{rs} \\
 &= - \sum_{rs} q_{rs} \sum_k P_k^{rs} (\ln P_k^{rs} + \ln q_{rs}) \\
 &= - \sum_{rs} q_{rs} \sum_k P_k^{rs} \ln P_k^{rs} - \sum_{rs} q_{rs} \sum_k P_k^{rs} \ln q_{rs} \\
 &= - \sum_{rs} q_{rs} (-H_{rs}(\mathbf{P})) - \sum_{rs} q_{rs} \ln q_{rs} \sum_k P_k^{rs} \\
 &= \sum_{rs} q_{rs} H(\mathbf{P}) - \sum_{rs} q_{rs} \ln q_{rs} \\
 \therefore Z(\mathbf{f}) &= \sum_{rs} \underline{q_{rs} H(\mathbf{P})} - \sum_{rs} q_{rs} \ln q_{rs} \tag{6.21}
 \end{aligned}$$

エントロピーが最大となるとき、 $Z(\mathbf{f})$ も最大となる

2. エントロピーモデルとロジットモデル

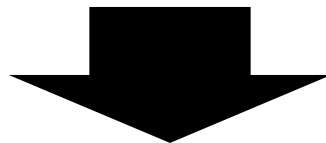
エントロピー関数の最大・最小値に関する性質

1. エントロピー関数は、すべての確率が等しい場合に最大値をとる

$$\max H(P_1, P_2, \dots, P_k) = H(1/K, 1/K, \dots, 1/K) = \log K$$

2. エントロピー関数は、どれかひとつの確率が1の場合に最小値をとる

$$\max H(P_1, P_2, \dots, P_k) = H(1, 0, \dots, 0) = H(0, 1, \dots, 0) = \dots = H(0, 0, \dots, 1) = 0$$



エントロピー：各経路へのフローのばらつき具合、
経路選択の不確定性

2. エントロピーモデルとロジットモデル

【SA-1】がロジット型配分モデルと等価であることを示す

1. この問題の解が唯一であることを示す
2. この問題の最適条件からロジットモデルが導かれることを示す

1. エントロピーモデルの解の唯一性を示す

- a. 最大化目的関数が狭義凹関数
- b. 許容領域が閉凸集合
- c. 許容領域が有界

⇒5章1節(3)「解の一意性」と行っていることが同じなので省略

2. エントロピーモデルとロジットモデル

2. この問題の最適条件からロジットモデルが導かれることを示す

【SA-1】のLagrangeanを定義する(手順...制約条件の差を取り線形和を作る)

$$L(\mathbf{f}, \theta, \eta) = Z(\mathbf{f}) + \theta \left\{ \hat{E} - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} \right\} + \sum_{rs} \eta_{rs} \left\{ q_{rs} - \sum_k f_k^{rs} \right\} \quad (6.22)$$

この最適条件は、【SA-1】が凸計画問題であることから、Kuhn-Tucker条件より

$$f_k^{rs} \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0 \text{ and } \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} \leq 0 \quad \forall k \in R_{rs}, \forall (r, s) \in W \quad (6.23)$$

$$\theta \geq 0 \text{ and } \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} \leq \hat{E} \quad (6.17)$$

$$q^{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.18)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in R_{rs}, \forall (r, s) \in W \quad (6.19)$$

q_{rs} : フロー(OD交通量) (ODペア(r, s))

f_k^{rs} : 経路の交通量(k 番目ODペア(r, s))

c_k^{rs} : 経路費用(k 番目ODペア(r, s))

θ, η : Lagrange乗数

2. エントロピーモデルとロジットモデル

$f_k^{rs} > 0$ とすると、 $k-t1$ より

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = -\ln f_k^{rs} - 1 - \theta c_k^{rs} - \eta_{rs} = 0$$



$$f_k^{rs} = \exp[-\theta c_k^{rs}] \exp[-\eta_{rs} - 1] \quad (6.24a)$$

f_k^{rs} をフローの保存式に代入すると

$$\eta_{rs} = \ln \sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}] - \ln q_{rs} - 1 \quad (6.24b)$$



経路交通量は、次のようなロジットモデル型の式で与えられる

$$f_k^{rs} = q_{rs} \frac{\exp[-\theta c_k^{rs}]}{\sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}]} \quad (6.25)$$

q_{rs} : フロー(OD交通量) (ODペア(r, s))

f_k^{rs} : 経路の交通量(k 番目ODペア(r, s))

c_k^{rs} : 経路費用(k 番目ODペア(r, s))

θ, η : Lagrange乗数

2. エントロピーモデルとロジットモデル

$$f_k^{rs} \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0 \text{ and } \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} \leq 0 \quad \forall k \in R_{rs}, \forall (r, s) \in W$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = -\ln f_k^{rs} - 1 - \theta c_k^{rs} - \eta_{rs} = 0$$

もし $f_k^{rs} = 0$ ならば、 $-\ln f_k^{rs} \rightarrow +\infty$ であるので、 $\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} \leq 0$ に矛盾する。

従って $f_k^{rs} \neq 0$

$$f_k^{rs} = q_{rs} \frac{\exp[-\theta c_k^{rs}]}{\sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}]} \quad (6.25)$$



エントロピー最大化問題【SA-1】は、ロジット型配分モデルと等価である

q_{rs} : フロー(OD交通量) (ODペア (r, s))

θ, η : Lagrange乗数

f_k^{rs} : 経路の交通量(k 番目ODペア (r, s))

c_k^{rs} : 経路費用(k 番目ODペア (r, s))

2. エントロピーモデルとロジットモデル

エントロピーモデルのその他の形式

1. コスト最小化モデル

エントロピーの値が \hat{H} であると観測された条件下で交通量パターンを予測する

【SA-2】

$$\min. Z_2(f) = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} \quad (6.26)$$

$$\text{sub. to} \quad q^{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.18)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in R_{rs}, \forall (r, s) \in W \quad (6.19)$$

$$-\sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \geq \hat{H} \quad (6.27)$$

SA-1の目的関数と制約条件を入れ替えたもの
これもロジットモデルに帰着する

2. エントロピーモデルとロジットモデル

$$L_2(\mathbf{f}, \theta, \eta) = Z(\mathbf{f}) + \frac{1}{\theta} \left\{ \hat{H} - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \right\} + \sum_{rs} \eta_{rs} \left\{ q_{rs} - \sum_k f_k^{rs} \right\}$$

$$\Rightarrow f_k^{rs} = \exp[-\theta c_k^{rs}] \exp[\theta \eta_{rs} - 1] \quad \forall k \in R_{rs}, \forall (r, s) \in W \quad (6.28a)$$

これをフローの保存則に代入すると、 η は

$$\eta_{rs} = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}] + \frac{1}{\theta} \ln q_{rs} + \frac{1}{\theta} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.28b)$$

$$f_k^{rs} = q_{rs} \frac{\exp[-\theta c_k^{rs}]}{\sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}]} \quad (6.25)$$

エントロピー最大化問題【SA-1】は、ロジット型配分モデルと等価である

q_{rs} : フロー(OD交通量) (ODペア(r, s))

θ, η : Lagrange乗数

f_k^{rs} : 経路の交通量(k 番目ODペア(r, s))

c_k^{rs} : 経路費用(k 番目ODペア(r, s))

2. エントロピーモデルとロジットモデル

エントロピーモデルのその他の形式

2. エントロピー・コスト調和モデル

二つのモデルを調和させた最適化問題

$$\text{【SA-3】} \quad \min. Z_3(f) = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} + \frac{1}{\theta} \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \quad (6.29)$$

$$\text{sub. to} \quad q^{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.18)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in R_{rs}, \forall (r, s) \in W \quad (6.19)$$

このモデルもLagrangeanを構成すると【SA-2】の場合と同型になる

$\theta \rightarrow +\infty$: エントロピー項がゼロになる	\rightarrow	最短経路に全フロー
$\theta \rightarrow 0$: エントロピー項が大きくなる	\rightarrow	すべての経路に等確率



θ : システムの秩序状態と無秩序状態のバランスを決めるパラメータ

2. エントロピーモデルとロジットモデル

【SA-1】【SA-2】【SA-3】ともにロジット型の経路選択率を与えるモデルとなった。

一方でパラメータの取得方法が異なる。

【SA-1】総走行費用 \hat{E} を外生的に与え、パラメータ θ がLagrange乗数として自動的に決定

【SA-2】エントロピー \hat{H} を外生的に与え、パラメータ θ がLagrange乗数の逆数として自動的に決定

【SA-3】経路選択のばらつきを表すパラメータ θ を外生的に与える

【SA-1】と【SA-2】を比較すると、エントロピーを外生的に与えている【SA-2】のエントロピーの値が過小に推定される傾向にあり、従ってパラメータ推定に偏りが生じる。また、従来の研究から【SA-1】のほうが計算効率も良い。

2. エントロピーモデルとロジットモデル

はじめに

2節では確率的配分モデル(6.1)を最適化問題として表現し、利用者行動の不確定性を表現した。

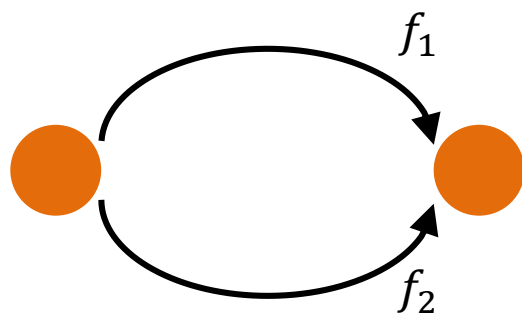
3節では混雑現象を考慮するため、モデルに均衡の概念を取り入れる。

- 確率的利用者均衡(SUE)状態
- SUEモデルの定式化

3. 確率的利用者配分とその定式化

- 交通コストは交通量の増加関数として表現されるとする
- 利用者のコストの認識には確率的にばらつく誤差があるとする
⇒ 利用者の行動は、ランダム効用理論に基づくモデルによって表現できる

簡単なネットワークの例



観測リンクコストはリンク交通量の単調増加関数

$$C_i = C_i(f_i) \quad (6.30)$$

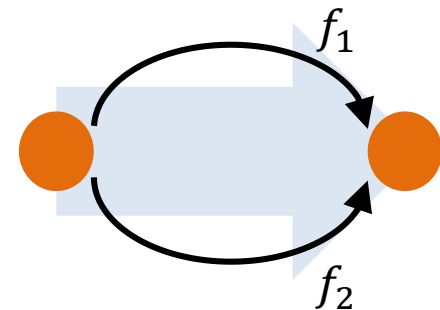
認知リンクコストは観測リンクコストに認知誤差を加え

$$C_i + \xi_i$$

3. 確率的利用者配分とその定式化

利用者の行動がランダム効用モデルによって表現できるとし、経路*i*が選ばれる確率は

$$P_i = \text{Prob}\{C_i + \xi_i \leq C_j + \xi_j\} \quad (6.31)$$



その交通量の期待値は

$$f_i = q * P_i \quad (6.32)$$

利用者は毎日の交通によって、認知コストが最小になるように経路を選ぶ行動を繰り返していく。

⇒どの利用者也自分が経路を変更することによって、自分の経路費用を減少させることが出来ないと信じている状態(確率的利用者均衡(Stochastic User Equilibrium)状態)に落ち着く

※Wardrop均衡の概念を一般的に拡張したもの

3. 確率的利用者配分とその定式化

交通サービスの供給条件を表すリンクコスト関数を以下の関数形と仮定(簡単のため)

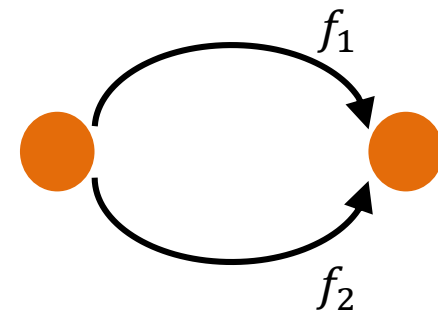
$$C_i = A_i \times f_i + B_i \quad (i = 1, 2) \quad (6.33)$$

フロー保存則から $f_2 = q - f_1$ となるから、リンクコストの差は

$$\text{Supply: } C_2 - C_1 = -(A_1 + A_2)f_1 + (B_2 - B_1 + qA_1) \quad (6.34a)$$

SUEでの利用者の需要を表す関数にロジットモデルを仮定すると、リンク1の需要関数は

$$\begin{aligned} \text{Demand: } f_1 &= q \times \frac{\exp[-\theta C_1]}{\{\exp[-\theta C_1] + \exp[-\theta C_2]\}} \\ &= \frac{q}{1 + \exp[-\theta(C_2 - C_1)]} \end{aligned} \quad (6.34b)$$

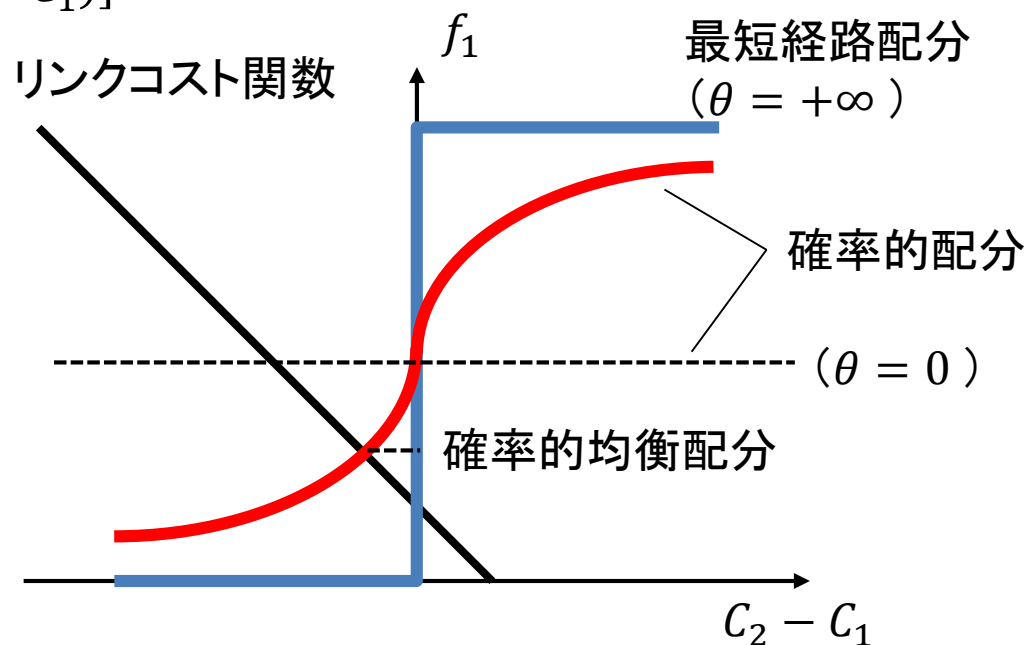


3. 確率的利用者配分とその定式化

前ページの需要供給曲線をプロットする

$$C_2 - C_1 = -(A_1 + A_2)f_1 + (B_2 - B_1 + qA_1)$$

$$f_1 = \frac{q}{1 + \exp[-\theta(C_2 - C_1)]}$$



SUE交通量: 需要を表す曲線と、供給を表す直線の交点

3. 確率的利用者配分とその定式化

- 確率的配分と同じ点
SUE配分モデルでは、利用者の経路選択行動は確率的配分モデルと同様に定式化される点(=最初に確認した q_{rs} や f_k^{rs} などの条件のこと)
- 確率的配分と異なる点
リンクコストがリンク交通量の関数となっている点

$$t_{ij} = t_{ij}(x_{ij}) \quad (6.35)$$

それらの式を同時に満たした状態として、
確率的利用者近郊配分モデルが定式化される

4. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

はじめに

- 6.3節で出た確率的利用者均衡 (**SUE**: Stochastic Use Equilibrium) 配分は、6.1節の確率的配分と、5章の利用者均衡配分を組み合わせたもの
- これら2つの配分の等価最適化問題を組み合わせることで、**SUE配分と等価な最適化問題**を定式化できる
(ここではロジット型のみを扱う)
- 定式化にはいくつかのバリエーションがある
 - ① エントロピー・積分コスト調和モデル(【SA-3】の応用)** **9章**
 - ② エントロピー最大化モデル(【SA-1】の応用)**
 - ③ 積分コスト最小化モデル(【SA-2】の応用)**

x_{ij} : リンク ij のリンク交通量

$t_{ij}(x_{ij})$: リンク ij のリンクコスト関数

f_k^{rs} : ODペア rs 間第 k 経路の経路交通量

q_{rs} : ODペア rs 間のOD交通量

θ : パラメータ

A : リンク集合

W : ODペア集合

K_{rs} : ODペア rs 間の経路集合

$$\delta_{ij,k}^{rs} = \begin{cases} 1: \text{ODペア}rs\text{間第}k\text{経路がリンク}ij\text{を含む時} \\ 0: \text{そうでない時} \end{cases}$$

4. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

① エントロピー・積分コスト調和モデル【SUE/FD-path】(【SA-3】由来)

目的関数2項の比 θ を外生的に与える

$$\min. \quad Z(\mathbf{f}) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega - \frac{1}{\theta} \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(\mathbf{f}^{rs}) \quad (6.36)$$

$$\text{subject to} \quad x_{ij} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k}^{rs} \quad \forall (i, j) \in A \quad (6.37)$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.38)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.39)$$

ただし,

$$H_{rs}(\mathbf{f}^{rs}) \equiv - \sum_k P_k^{rs} \ln P_k^{rs} = - \sum_k \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}} \ln \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}} \quad (6.40)$$

H_{rs} : エントロピー関数
(rs 間の各経路へのフローのバラつき
が大きいほど大きな値をとる)

P_k^{rs} : 経路選択確率 $\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}$

4. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

② エントロピー最大化モデル【SUE/FD-path1】(【SA-1】由来)

総走行費用の値を外生的に与える

$$\max. \quad Z(\mathbf{f}) = \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(\mathbf{f}^{rs}) \quad (6.41)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega \leq \hat{E} \quad (6.42)$$

$$x_{ij} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k} \quad \forall (i, j) \in A \quad (6.37)$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.38)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.39)$$

\hat{E} : 観測交通量より推定されるネットワーク総走行費用の値

4. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

③ 積分コスト最小化モデル【SUE/FD-path2】(【SA-2】由来)

エントロピーの値を外生的に与える

$$\min. \quad Z(\mathbf{x}) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega \quad (6.43)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(\mathbf{f}^{rs}) \geq \hat{H} \quad (6.44)$$

$$x_{ij} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k} \quad \forall (i, j) \in A \quad (6.37)$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.38)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.39)$$

\hat{H} : 観測交通量より推定される経路選択エントロピーの値

4. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

- これらの等価最適化問題のKKT条件から、以下の式が得られる(証明はp.87)

$$f_k^{rs} = q_{rs} \times \frac{\exp[-\theta c_k^{rs}(\mathbf{x}(\mathbf{f}))]}{\sum_l \exp[-\theta c_l^{rs}(\mathbf{x}(\mathbf{f}))]} \quad (6.48)$$

⇒ ロジット型SUE配分モデルの定義式になっている

- Wardrop均衡配分と異なり、**リンク交通量 \mathbf{x} ・経路交通量 \mathbf{f} とも一意に定まる**

cf) Wardrop均衡配分ではリンク交通量は一意に定まるが、経路交通量は必ずしも唯一でない

c_k^{rs} : ODペア rs 間第 k 経路のコスト ($= \sum_{ij} t_{ij}(x_{ij}) \delta_{ij,k}^{rs}$)

4. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

- リンク交通量とリンクコストは1対1に対応している
⇒ **リンクコストを未知変数とした等価最適化問題**も作れるはず
- 等価最適化問題①の*双対問題を基に導く **9章**
- 等価最適化問題①のLagrangianを L とすると、双対問題は以下のように定式化される

$$\begin{aligned} \max_{\tau, \eta} \quad L(\mathbf{x}, \mathbf{f}, \tau, \eta) = & \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega - \frac{1}{\theta} \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(\mathbf{f}^{rs}) \\ & + \sum_{ij} \tau_{ij} \left(x_{ij} - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k}^{rs} \right) + \sum_{rs} \eta_{rs} \left(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs} \right) \end{aligned} \quad (6.49 \cdot 50)$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = & \frac{1}{\theta} (\ln f_k^{rs} + 1 - \ln q_{rs}) - \sum_{ij} \tau_{ij} \delta_{ij,k}^{rs} - \eta_{rs} = 0 \\ & \forall k \in K_{rs} \quad \forall (r, s) \in W \end{aligned} \quad (6.51a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = t_{ij}(x_{ij}) + \tau_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad (6.51b)$$

*双対問題: ある最適化問題とセットで作ることのできる最適化問題で、一方が解を持てばもう一方も同じ解を持つ 導き方etc.は本文・Appendix B参照

4. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

- この双対問題を解いて整理すると, t のみを未知変数とした以下のような最適化問題が得られる

$$\min. \quad Z_D(\mathbf{t}) = - \sum_{ij} \int_{t_{ij}(0)}^{t_{ij}} x_{ij}(v) dv + \sum_{rs} q_{rs} S_{rs}(\mathbf{c}^{rs}(\mathbf{t})) \quad (6.57)$$

ただし, $S_{rs}(\mathbf{c}^{rs}(\mathbf{t}))$ は期待最少費用関数(6.1節) (ロジット型の場合下式)

$$S_{rs}(\mathbf{c}^{rs}(\mathbf{t})) \equiv E \left[\min_{k \in R_{rs}} \tilde{c}_k^{rs} \right] = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_k \exp(-\theta c_k^{rs}) \quad (6.56b)$$

- この最適化問題を解くことにより, リンクコストからSUE配分が求まる
- (6.57)は, ロジットモデル以外のランダム効用理論にも適用可能である
 - それぞれの選択モデルに対応する $S_{rs}(\mathbf{c}^{rs}(\mathbf{t}))$ を用いればよい

4. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

- ここまでに示した等価最適化問題は経路交通量 f を用いた表現
- ↓
- 一般的なネットワークでは経路の列挙は難しいため、**リンク交通量を用いた表現** (arc-node形式) に改める
 - 起点別リンク交通量 (r を起点としリンク ij を通る交通量) を x_{ij}^r とすると、フロー保存条件式(6.37)(6.38)は

$$x_{ij} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k}^{rs} \quad \forall (i,j) \in A \quad (6.37)$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r,s) \in W \quad (6.38)$$

$$\sum_i x_{ik}^r - \sum_j x_{kj}^r + \sum_s (q_{rs} \delta_{rk} - q_{rs} \delta_{sk}) = 0 \quad \forall k \in N \quad \forall r \in R \quad (6.70)$$

と表すことができる

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1: a = b \text{の時} \\ 0: a \neq b \text{の時} \end{cases} \quad (\text{クロネッカーのデルタ})$$

4. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

$$x_{ij} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k}^{rs} \quad \forall (i, j) \in A \quad (6.37)$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.38)$$

$$\sum_i x_{ik}^r - \sum_j x_{kj}^r + \sum_s (q_{rs} \delta_{rk} - q_{rs} \delta_{sk}) = 0 \quad \forall k \in N \quad \forall r \in R \quad (6.70)$$

- (6.70)第1項: ノード k に入ってくるフローの量
- (6.70)第2項: ノード k から出ていくフローの量
- (6.70)第3項: (ノード k が発生源となっていれば、その発生量) - (ノード k が収束点となっていれば、その収束量)

x_{ij} : リンク ij のリンク交通量

x_{ij}^r : 起点別リンク交通量(r を起点としリンク ij を通る交通量)

f_k^{rs} : ODペア rs 間第 k 経路の経路交通量

q_{rs} : ODペア rs 間のOD交通量

$\delta_{ab} = \begin{cases} 1: a = b \text{の時} \\ 0: a \neq b \text{の時} \end{cases}$ (クロネッカーのデルタ)

4. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

- スライドNo.3の等価最適化問題①をarc-node形式に書き換えると,

$$\min. \quad Z(\mathbf{f}) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega - \frac{1}{\theta} \sum_r \{HL(\mathbf{x}^r) - HN(\mathbf{x}^r)\} \quad (6.71)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_i x_{ik}^r - \sum_j x_{kj}^r + \sum_s (q_{rs} \delta_{rk} - q_{rs} \delta_{sk}) = 0 \quad \forall k \in N \quad \forall r \in R \quad (6.70)$$

$$x_{ij} = \sum_r x_{ij}^r \quad \forall (i, j) \in A \quad (6.72)$$

$$x_{ij}^r \geq 0 \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.73)$$

ただし,

$$HN(\mathbf{x}^r) \equiv - \sum_j \left(\sum_i x_{ij}^r \right) \ln \left(\sum_i x_{ij}^r \right) \quad (6.74)$$

$$HL(\mathbf{x}^r) \equiv - \sum_{ij} x_{ij}^r \ln x_{ij}^r \quad (6.75)$$

5. リンク間に相互作用がある場合のSUE配分

- リンクコスト関数が他のリンクの交通量の影響も受ける場合には、前頁までの等価最適化問題は構成できない
- 他のリンクの影響を受け、かつその相互作用が*非対称な場合には、最適化問題ではなく変分不等式として表現する **9章**

$$\text{find } (\mathbf{f}^*, \mathbf{x}^*) \in K_{2P} \quad \text{such that} \quad \frac{1}{\theta} \mathbf{ln}(\mathbf{f}^*) \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{f}^*) + \mathbf{t}(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \leq 0$$

$$\forall (\mathbf{f}, \mathbf{x}) \in K_{2P} \quad (6.81a)$$

ただし,

$$K_{2P} = \{(\mathbf{f}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{q} = \mathbf{E}\mathbf{f}, \quad \mathbf{x} = \Delta\mathbf{f}, \quad \mathbf{f} \geq \mathbf{0}\} \quad (6.81b)$$

*任意のリンク a, b について $\frac{\partial t_a(\mathbf{x})}{\partial x_b} = \frac{\partial t_b(\mathbf{x})}{\partial x_a}$ が成立するとき対称, しないとき非対称であるという

\mathbf{E} : 経路・ODペア接続行列 (経路 k がODペア n 間である時 n 行 l 列が1, そうでない時0である行列)

Δ : リンク・経路接続行列 (経路 k にリンク a が含まれる時 a 行 l 列が1, そうでない時0である行列)

5. リンク間に相互作用がある場合のSUE配分

- 相互作用はあるが対称である場合には、以下の最適化問題で表現できる

$$\min. \quad Z(\mathbf{f}) = \sum_{ij} \int_0^1 t_{ij}(\mathbf{x}(s)) ds - \frac{1}{\theta} \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(\mathbf{f}^{rs}) \quad (6.83)$$

$$\text{subject to} \quad x_{ij} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k} \quad \forall (i, j) \in A \quad (6.37)$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.38)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad (6.39)$$

5. リンク間に相互作用がある場合のSUE配分

- Jacobianが正定値※でない時には、均衡パターンは必ずしも一意に定まらず、複雑な現象が起こる場合がある

$$\left(\begin{array}{l} \text{※ Jacobian} = J = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial t_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{が} \forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \text{に対して} \mathbf{z}^T J \mathbf{z} > 0 \text{であるとき正定値という} \end{array} \right)$$

例題

- ✓ 孤立したODペアのみを結ぶ1本の道路に、バス・自動車の2つのモードが流れている
- ✓ それぞれのコスト t_{bus} , t_{car} を以下の式で表す

$$\begin{aligned} t_{bus} &= A_1 x_{bus} + A_3 x_{car} + A_4 \\ t_{car} &= A_2 x_{bus} + A_3 x_{car} + A_5 \end{aligned} \quad (6.85)$$

- ✓ 両者のコストの差を c とすると

$$c \equiv t_{car} - t_{bus} = (A_2 - A_1)x_{bus} + (A_5 - A_4) = (x_{bus} - \beta)/\alpha \quad (6.86)$$

$$(\text{ただし } \alpha = 1/(A_2 - A_1) \text{ , } \beta = (A_4 - A_5)\alpha \text{)}$$

すなわち

$$x_{bus}(c) = \alpha c + \beta \quad (6.86)'$$

5. リンク間に相互作用がある場合のSUE配分

- ✓ OD交通量 q は一定で

$$x_{bus} + x_{car} = q = \text{fixed} \quad (6.87)$$

- ✓ 利用者の選択行動はロジットモデルで決まる

$$x_{bus} = q \times \frac{\exp[-\theta t_{bus}]}{\exp[-\theta t_{bus}] + \exp[-\theta t_{car}]} = \frac{q}{1 + \exp[-\theta c]} \quad (6.88)$$

- ✓ (6.86)'と(6.88)を $c - x_{bus}$ 平面上に描くと(図6.4), 2曲線の交点が均衡解となる
 $\Rightarrow \alpha, \beta$ の値によっては, 2つまたは3つの均衡解が出現する

- ✓ 図6.5は, α をある固定値($\alpha > 0$)とした場合の, 均衡解 x_{bus} とパラメータ β の関係を示す

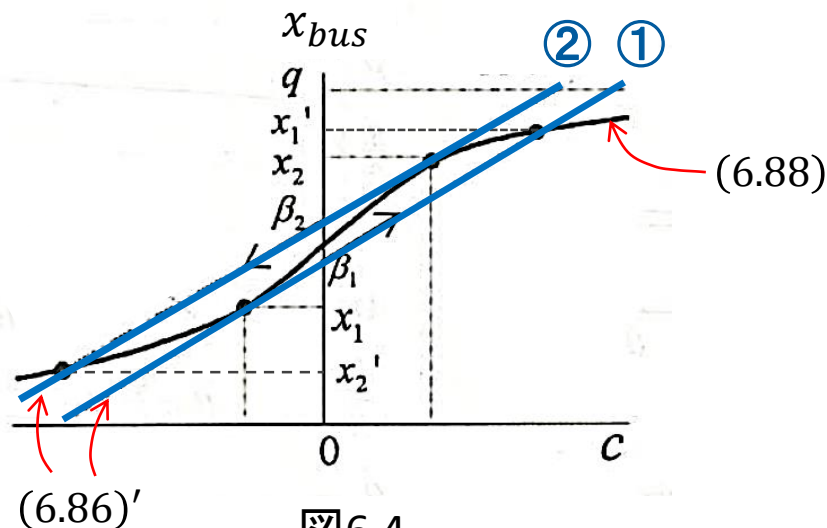


図6.4

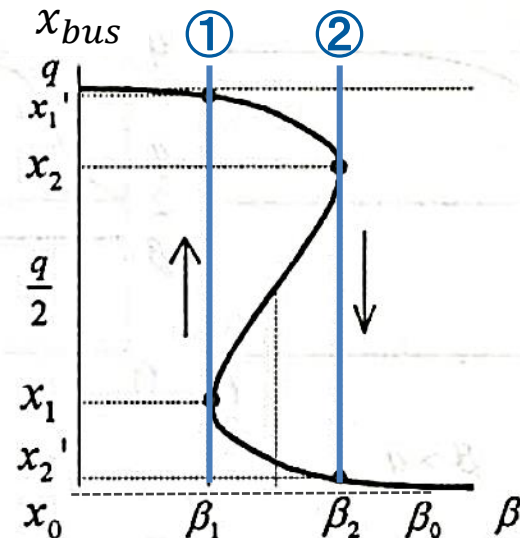


図6.5

5. リンク間に相互作用がある場合のSUE配分

注意)

パラメータの値は、基本的に図6.5の線の上(赤い部分を除く)を移動するようにはしか変化しない。

$$x_{bus}(c) = \alpha c + \beta \quad (6.86)'$$

バスの交通量が x_0 の状態(パラメータ β が β_0 の状態)から始まるとすると、バスの交通量は自動車と比較して少なくなっている。そこで、自動車に渋滞料金を課し(バスのコストを下げる= β を小さくする)、バスの交通量を増やす。

図6.5を見ると、バスの交通量が x_1 を超えるとき、渋滞課金を下げることによってバスの交通量をさらに増加させることができる。一方で、そのときの渋滞課金を保つことによって一気にバスの交通量を増やすことができるので、赤い部分を通ることはないのである。

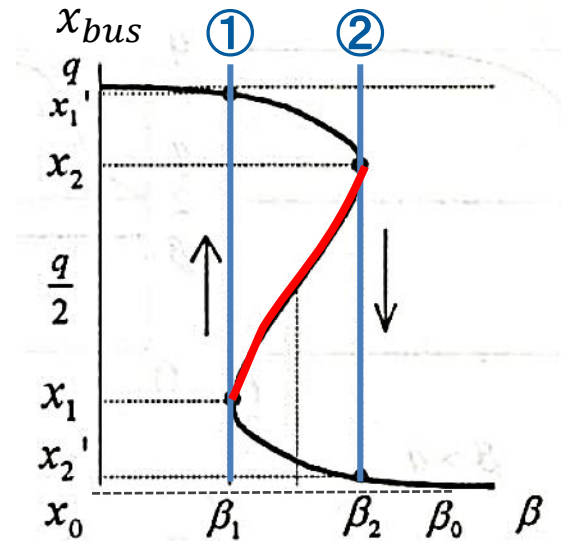


図6.5

5. リンク間に相互作用がある場合のSUE配分

- β の初期値が $\beta_0 (> \beta_2)$ である時の均衡バス交通量は x_0 となる
- β_0 から β_2, β_1 と徐々に小さくしてゆくと、均衡解は x_2', x_1 と大きくなってゆく
- さらに β が小さくなると、均衡バス交通量は x_1 から x_1' へジャンプし、急激に需要が増加する
- 同様に β を大きくしていった場合も、 β_2 で x_2 から x_2' へとジャンプする
- α や θ を固定せず変化させた場合も、 x の変化形態に影響を与える(図6.6・6.8)

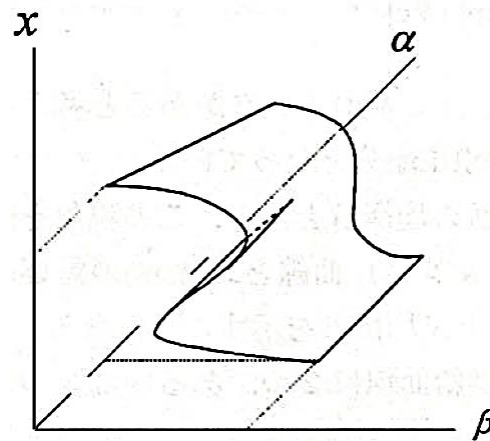


図6.6 均衡交通量 x と (α, β) の関係

5. リンク間に相互作用がある場合のSUE配分

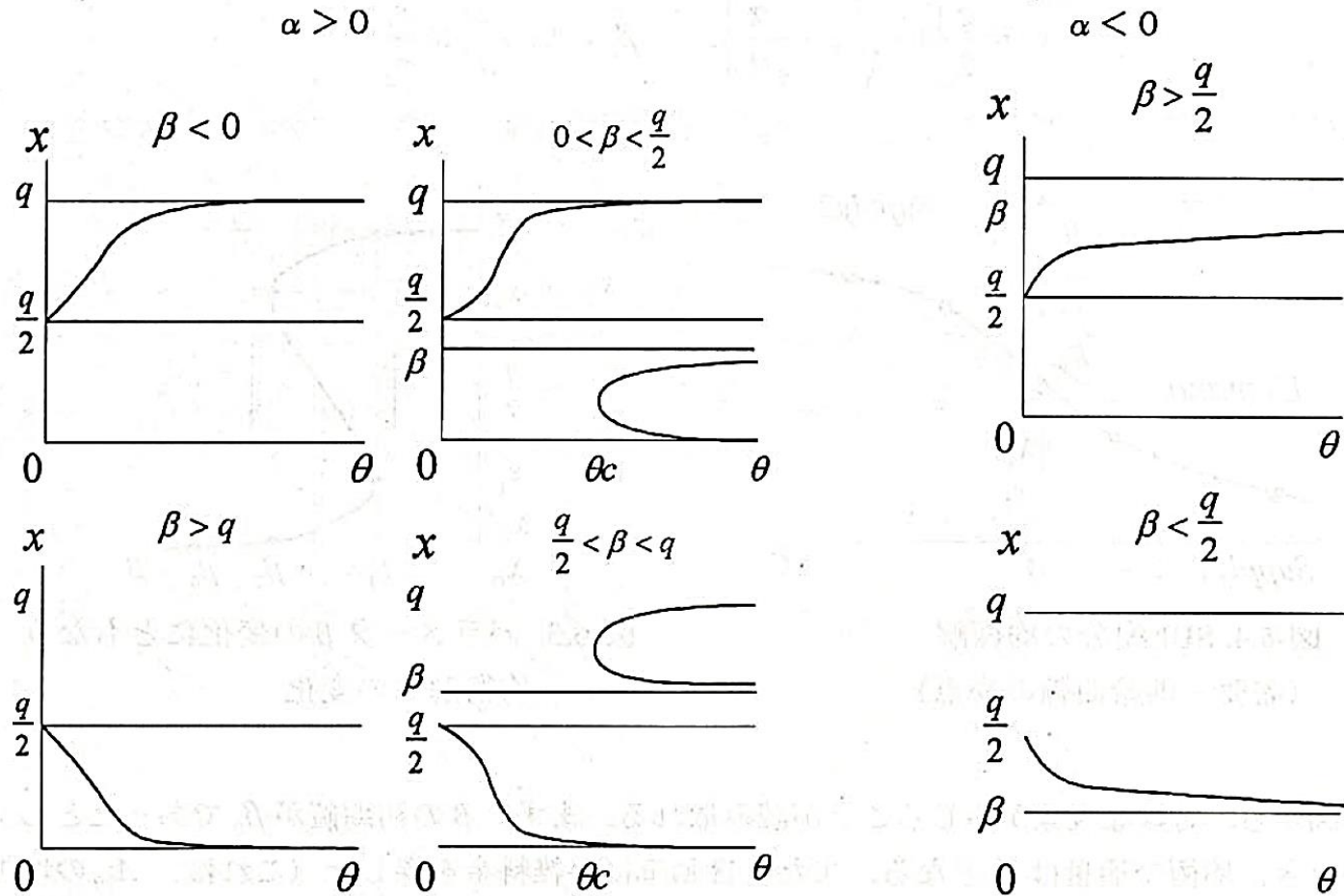


図6.8 θ の変化と均衡解 x の関係

参考文献

- 土木学会 土木計画学研究委員会(1998):「交通ネットワークの均衡分析—最新の理論と解法—」第6章, 土木学会.
- 東京大学大学院工学系研究科 都市生活学・ネットワーク行動学研究グループ(2016), 確率的利用者均衡配分モデル(Stochastic User Equilibrium), <http://bin.t.u-tokyo.ac.jp/startup16/file/6-2.pdf>(最終閲覧2017年7月20日)