第12回基礎ゼミ

第5章　利用者均衡モデル

2017年6月13日（火）

福田研究室　B4
五百藏夏穂

コンテンツ

1.1　利用者均衡モデル

利用者均衡解の定式化

wardropの利用者均衡

最も所要時間の少ない経路を選択
結果として起終点間に存在する経路のうち利用される
経路の所要時間はみな等しく、利用されていない経路の
所要時間より小さいか、せいぜい等しい

定式化

$$\mathrm{f}_k^{rs} > 0 \quad のとき \quad c_k^{rs} = c_{rs} \quad \forall k \in K_{rs} \ \forall rs \in \Omega$$

$$\mathrm{f}_k^{rs} = 0 \quad のとき \quad c_k^{rs} \geq c_{rs} \quad \forall k \in K_{rs} \ \forall rs \in \Omega$$

$$\mathrm{f}_k^{rs}(c_k^{rs} - c_{rs}) = 0$$

$$(c_k^{rs} - c_{rs}) \geq 0$$

制約条件

$$\sum_{k \in K_{rs}} \mathrm{f}_k^{rs} - \mathrm{Q}_{rs} = 0 \quad \forall rs \in \Omega$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs} \ \forall rs \in \Omega$$

f_k^{rs}:ODペアrs間第k経路の経路交通量
c_k^{rs}:ODペアrs間第k経路の経路所要時間
c_{rs}:ODペアrs間の最短経路所要時間
Q_{rs}:ODペアrs間の分布交通量

1.1　利用者均衡モデル

利用者均衡解の定式化

経路→ネットワーク

$$c_k^{rs} = \sum_{a \in A} \delta_{a,k}^{rs} t_a(x_a) = 0 \qquad \forall k \in K_{rs} \ \ \forall rs \in \Omega$$

$$x_a = \sum_{k \in K_{rs}} \sum_{rs \in \Omega} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs} \qquad \forall a \in A$$

$t_a(x_a)$:リンクaのリンクコスト関数

x_a:リンクaのリンク交通量

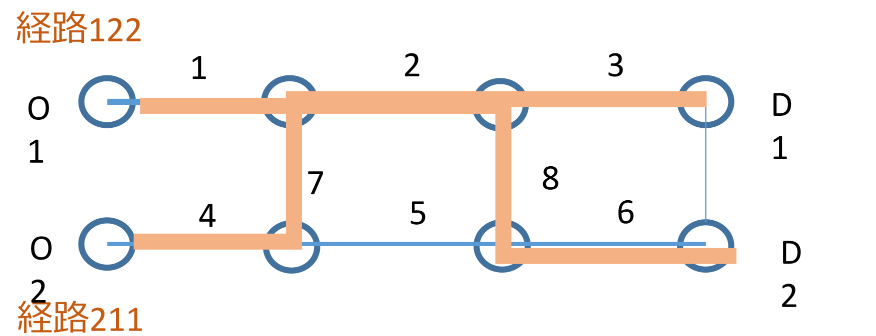
$\delta_{a,k}^{rs}$: $\begin{bmatrix} 1\text{: ODペアrs間経路がリンク}a\text{を含むとき} \\ 0\text{: そうでないとき} \end{bmatrix}$

ex)

$$c_1^{12} = \sum_{a \in A} \delta_{a,2}^{12} t_a(x_a) = t_1(x_1) + t_2(x_2) + t_8(x_8) + t_6(x_6)$$

$$c_1^{21} = \sum_{a \in A} \delta_{a,1}^{21} t_a(x_a) = t_4(x_4) + t_7(x_7) + t_2(x_2) + t_3(x_3)$$

$$x_2 = \sum_{k \in K_{rs}} \sum_{rs \in \Omega} \delta_{2,k}^{rs} f_k^{rs} = f_2^{12} + f_1^{21}$$



1.1　利用者均衡モデル

等価な最適化問題への変換

$$min.Z_p = \sum_{a\in A}\int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

制約条件

$$\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs} - Q_{rs} = 0 \quad \forall rs \in \Omega$$

$$x_a = \sum_{k\in K_{rs}}\sum_{rs\in\Omega}\delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs} \quad \forall a \in A$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad x_a \geq 0$$

最適化

Lagrangian関数

$$L(f,\lambda)=Z_p(f) - \sum_{rs\in\Omega}\lambda_{rs}\left(\sum_{k\in K} f_k^{rs} - Q_{rs}\right)$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

Kuhn-Tucker条件

$$f_k^{rs}\frac{\partial L(f*,\lambda*)}{\partial f_k^{rs}} = 0 \text{ and } f_k^{rs}\frac{\partial L(f*,\lambda*)}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 \qquad f_k^{rs} \geq 0\ \forall k, \forall rs$$

$$\frac{\partial L(f*,\lambda*)}{\partial \lambda_{rs}} = 0 \qquad \forall rs$$

$$\vdots$$

※P42,43参照

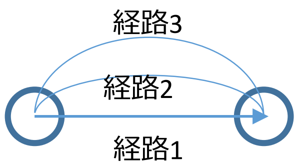
$$f_k^{rs} > 0 \quad \text{のとき} \quad c_k^{rs} = \lambda_{rs} \quad \forall k \in K_{rs}\ \forall rs \in \Omega$$

$$f_k^{rs} = 0 \quad \text{のとき} \quad c_k^{rs} \geq \lambda_{rs} \quad \forall k \in K_{rs}\ \forall rs \in \Omega$$

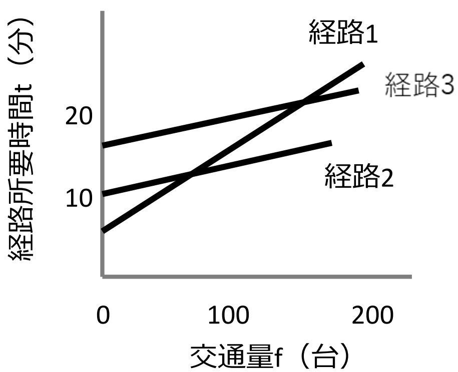
利用者均衡の定義と同じ

1.1　利用者均衡モデル

単純なネットワーク配分の例



OD交通量
Q =　200台



$$t_1 = 5 + 0.1f_1$$
$$t_2 = 10 + 0.025f_2$$
$$t_3 = 15 + 0.025f_3$$

定式化

$$min.\,Z_p = 5f_1 + 0.05f_1^2 + 10f_2 + 0.0125f_2^2 + 1015 + 0.0125f_3^2$$

s.t. $\sum_{k=1}^{3} f_k = 200$　　　$f_k \geq 0$

Lagrangian関数

L(f,λ)=

$$5f_1 + 0.05f_1^2 + 10f_2 + 0.0125f_2^2 + 1015 + 0.0125f_3^2 - \lambda(\sum f_k - 200)$$

$$f_k \geq 0$$

Kuhn-Tucker条件

$$5 + 0.1f_1 = \lambda\ (f_1 \geq 0),\ 5 + 0.1f_1 \geq \lambda(f_1 = 0)$$

$$10 + 0.025f_2 = \lambda\ (f_2 \geq 0),\ 10 + 0.025f_2 \geq \lambda(f_2 = 0)$$

$$15 + 0.025f_3 = \lambda\ (f_3 \geq 0),\ 15 + 0.025f_2 \geq \lambda(f_3 = 0)$$

$$\sum_{k=1}^{3} f_k - 200 = 0$$

所要時間の短い経路から
Kuhn-Tucker条件を調べて

経路1,2が利用されるとき最適解

f_1=80, f_2=120, f_3=0　　Z =2100

$t_3 = 15$分 $\geq t_1 = t_2 = \lambda$=13分

1.1　利用者均衡モデル

解の一意性

制約条件式によって示される変数の実行可能領域が凸でかつ目的関数が狭義の凸関数であればよい

・制約条件式が全て線形
→変数の実行可能領域の凸性

・目的関数Zが狭義凸関数
→リンク交通量に関する二次のHessian行列が整定値行列

ただしこれはリンク交通量に関してのみ

証明

$$\frac{\partial Z_p}{\partial x_a} = t_a(x_a) \qquad \forall a \in A$$

$$\frac{\partial^2 Z^p}{\partial x_a} = \begin{cases} \dfrac{dt_a(x_a)}{dx_a} > 0 & (a = b) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases} \qquad \forall a \in A$$

Hessian行列は以下のようになる

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dt_1(x_1)}{dx_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dfrac{dt_n(x_n)}{dx_n} \end{bmatrix}$$

リンクコスト関数は単調増加より

$$\frac{dt_a(x_a)}{dx_a} > 0 \qquad \forall a \in A$$

任意のベクトルh ≠0について
以下が成り立つので正定値

$$^t h \ (\nabla^2 Z_p) h = \sum_{a \in A} h_a^2 \cdot \frac{dt_a(x_a)}{dx_a} > 0$$

1.2　システム最適化配分

システム最適化配分

道路網における総走行時間が最小となるように配分する

$$min. Z_s = \sum_{a \in A} x_a t_a(x_a)$$

制約条件

$$\sum_{k \in K_{rs}} \mathrm{f}_k^{rs} - \mathrm{Q}_{rs} = 0 \quad \forall rs \in \Omega$$

$$x_a = \sum_{k \in K_{rs}} \sum_{rs \in \Omega} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs} \quad \forall a \in A$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad x_a \geq 0$$

$$min. Z_s = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} [\frac{d\left(w \cdot t_a(w)\right)}{dw}] \, \mathrm{dw}$$

$$= \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} [t_a(w) + \frac{w \cdot d\left(t_a(w)\right)}{dw}] \, \mathrm{dw}$$

利用者均衡配分と同様に積分形
→同じアルゴリズムで解ける

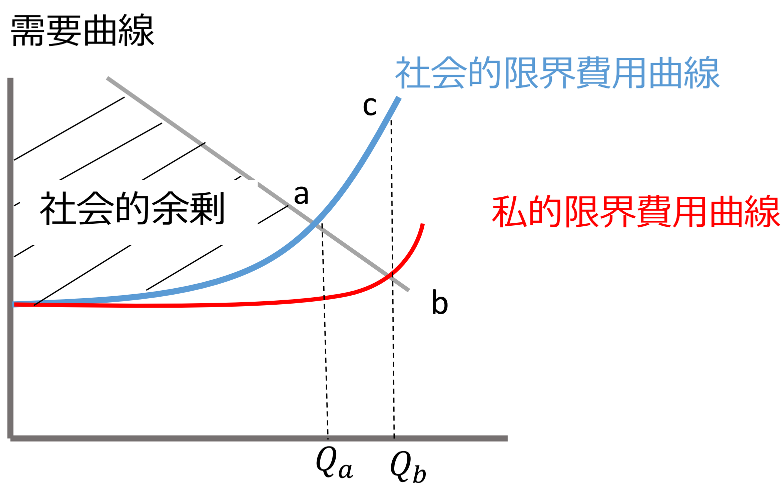
1.2　システム最適化配分

<u>混雑料金政策</u>

利用者均衡配分：ドライバー個人の費用（私的限界費用）最小化
道路利用者全体の最適化にはならない
システム最適化配分：道路利用者全体の費用（社会的限界費用）最小化

（社会的限界費用）ー（私的限界費用）＝（混雑料金）

➡ システム最適化



私的限界費用曲線　　混雑料金

$$t_a(w) + \boxed{\frac{w \cdot d\left(t_a(w)\right)}{dw}}$$

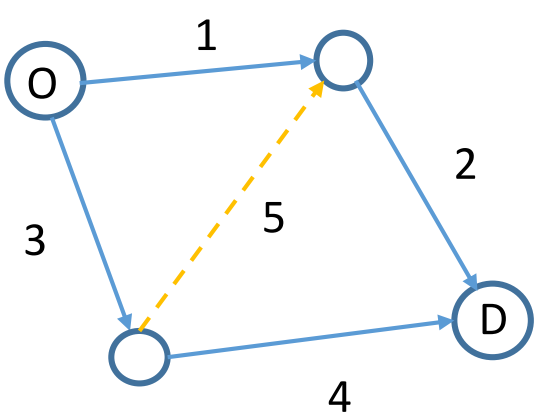
社会的限界費用曲線

1.3　利用者均衡とシステム最適化のパラドックス

交通政策におけるパラドックス

①Brassのパラドックス

新規道路建設による
サービスレベルの悪化



$f_1 = 300$ $f_2 = 300$

$c_1 = 83$ $c_2 = 83$

OD交通量：600台

$$t_1 = 50 + 0.01x_1$$
$$t_2 = 0.1x_2$$
$$t_3 = 50 + 0.01x_3$$
$$t_4 = 0.1x_4$$

$$t_5 = 10 + 0.01x_5$$

総所要時間：498台・分
UEの目的関数：399

$f_1 = 200$ $f_2 = 200$ $f_3 = 200$

$c_1 = 92$ $c_2 = 92$ $c_3 = 92$

総所要時間：552台・分
UEの目的関数：386

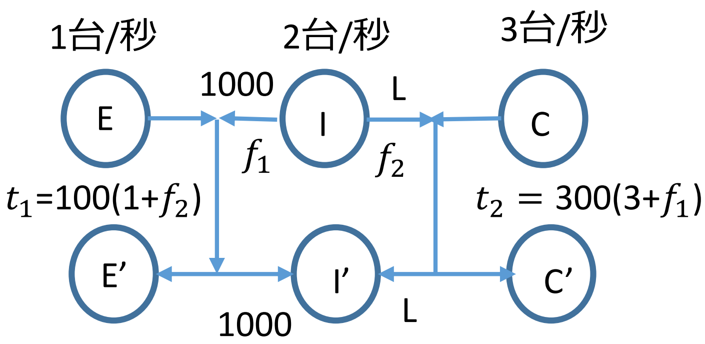
総旅行時間が
大きくなってしまった

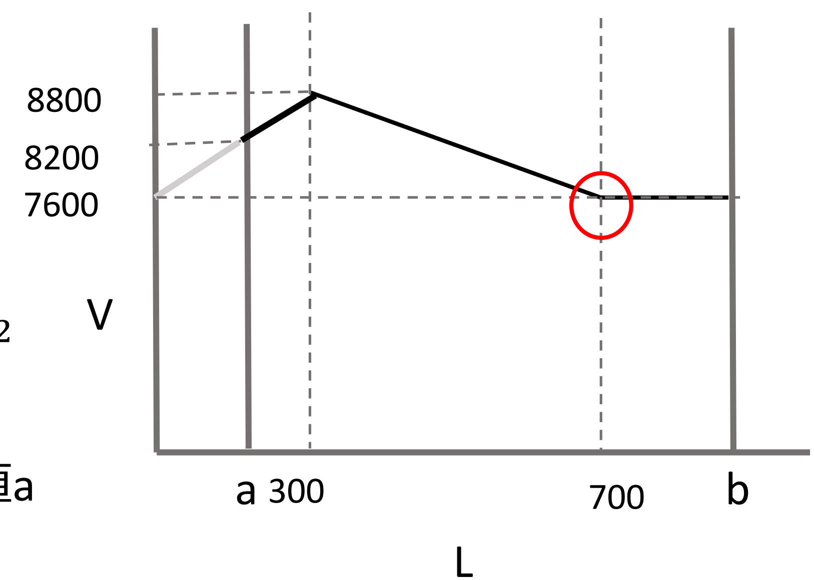
1.3　利用者均衡とシステム最適化のパラドックス

交通政策におけるパラドックス

②Smithのパラドックス

信号制御等の交通規制による
サービスレベルの悪化





ネットワークの総所要時間

$$V=V(F,L)=2000f_2+100(1+f_2)^2+2Lf_1+300(3+f_1)^2$$

制御する地点の交通を多くするためLを最小値a

➡ 交通流全体として最適にならない

2.1　NCP,VIP,FPPによる利用者均衡配分

相補性問題・変分不等式問題・不動点問題

リンクコスト関数がほかのリンク
の交通量にも依存する

$$t_a = t_a(x_1, \ldots, x_a, \ldots x_L) \quad \forall a \in A$$

⇨ ベクトル・リンクコスト関数(リンクコスト写像)

$$t(x): R_+^L \to R_+^L$$

2.1 NCP,VIP,FPPによる利用者均衡配分

まず経路交通量と経路コストのみで考える

経路コストは一般にその経路の交通量だけでなく
ほかのさまざまな交通量の影響も受ける

$$C_k^{rs} = C_k^{rs}(f)$$

複雑な関数
等価最適化問題を構成困難

利用者均衡条件

$$\begin{cases} f_k^{rs} \cdot (C_k^{rs}(f) - u_{rs}) = 0 \\ C_k^{rs}(f) - u_{rs} \geq 0 \quad f_k^{rs} \geq 0 \end{cases} \quad \forall k \in K_{rs} \ \ \forall rs \in W$$

$$\sum_{k \in K_{rs}} \mathrm{f}_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall rs \in W$$

凸計画問題（CPP）を
一般化した問題の利用

・非線形相補性問題（NCP）
・変分不等式問題（VIP）
・不動点問題（FPP）

2.1　NCP,VIP,FPPによる利用者均衡配分

非線形相補性問題（NCP）

標準系の相補性問題

$$\text{Find } x \in R_+^n \quad s.t \quad x \cdot F(x) = 0, x \geq 0 \;\; F(x) \geq 0$$

利用者均衡の式を置き換え相補性問題に

$$\begin{cases} f_k^{rs} \cdot (C_k^{rs}(f) - u_{rs}) = 0 \\ C_k^{rs}(f) - u_{rs} \geq 0 \quad f_k^{rs} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{rs}\left(\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs}\right) = 0 \\ \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} \geq 0 \;,\; u_{rs} \geq 0 \end{cases} \quad \forall rs \in W$$

全ての条件が相補性形式でかつ
変数(f,u)の許容領域が非負実数空間$R_+^{\mathrm{K}} \times R_+^{\mathrm{M}}$（$M$: 全ODペア数, K：全経路数）

利用者均衡配分は以下の標準系の非線形相補性問題と等価

【UE/FD-NCP】

$$\text{Find } x = (f, u) \in R_+^{\mathrm{K}} \times R_+^{\mathrm{M}}$$
$$s.t \quad x \cdot F(x) = 0, x \geq 0 \;\; F(x) \geq 0$$

2.1　NCP,VIP,FPPによる利用者均衡配分

ベクトル場Fが凸集合Ωに
直行している点を求める問題

変分不等式問題（VIP）

変分不等式問題

$$\text{Find } x \in \Omega \quad s.t \quad \mathrm{F(x)} \cdot (y - x) = 0 \ , \forall y \in \Omega$$

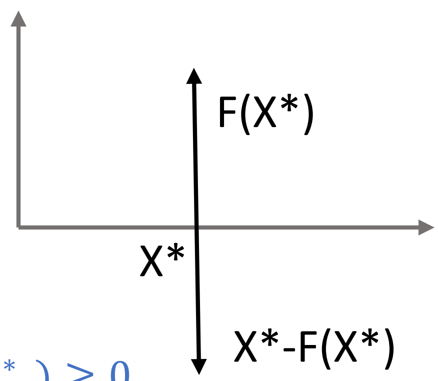
VIPはNCPを特殊形として含んだ一般的枠組み

→Ωを非実数空間R_{+}^{n}とすればVIP(F, R_{+}^{n})はNCP(F)と等価

利用者均衡配分は以下のVIPと等価

【UE/FD-VIP】

$$\text{Find } x *= (f *, u *) \in \Omega \equiv R_{+}^{\mathrm{K}} \times R_{+}^{\mathrm{M}}$$
$$s.t \quad \mathrm{F(x *)} \cdot (x - \mathrm{x} *) \geq 0 \ , \forall x \in \Omega$$



$$\sum_{rs}\sum_{k}(C_k^{rs}(f *) - u *_{rs}) \cdot (\mathrm{f}_k^{rs} - \mathrm{f}_k^{rs*}) + \sum_{rs}(\sum_{k}(\mathrm{f}_k^{rs} - q_{rs}) \cdot (u_{rs} - u_{rs}^{*}) \geq 0$$

$$\forall (f, u) \in R_{+}^{\mathrm{K}} \times R_{+}^{\mathrm{M}}$$

2.1　NCP,VIP,FPPによる利用者均衡配分

不動点問題（FPP）

不動点問題

$$Find\ x \in \Omega$$
$$\text{s.t.}\quad X = Proj_{\Omega,\mathrm{Q}}(\mathrm{x} - \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{F}(\mathrm{x}))$$

F(x)がΩに直行している点を求める問題

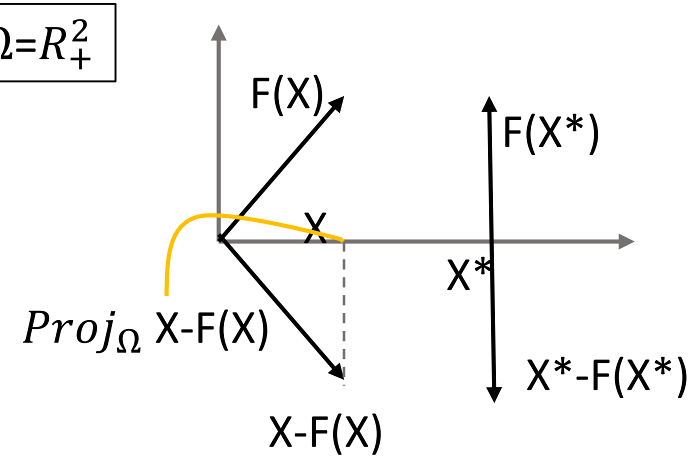
写像演算子は以下のように定義される

$$Proj_{\Omega,\mathrm{Q}}\mathrm{x} = \text{arg.min.}\{(\mathrm{z}-\mathrm{x})\cdot \mathrm{Q}(\mathrm{z}-\mathrm{x})\ \text{s.t.}\ \mathrm{z} \in \Omega\}$$

非負実数空間Ωでは射影は
以下の演算に帰着する

$$Proj_{R_+^{\mathrm{K,M}},\mathrm{Q}}(\mathrm{x}-\mathrm{F}(\mathrm{x})) = [\mathrm{x} - \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{F}(\mathrm{x})]$$

$\boxed{\Omega = R_+^2}$



【UE/FD-FPP】

$$\text{Find}\ x = (f,u) \in R_+^{\mathrm{K}} \times R_+^{\mathrm{M}}$$
$$s.t\quad x = [\mathrm{x} - \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{F}(\mathrm{x})]_+$$

2.2　VIPを用いた利用者均衡配分の表現

VIPとしてのいくつかの表現-主問題（交通量変数）

経路変数

f およびf*がフロー保存条件と非負条件を満たした凸領域Ω_{p0}に属する

$$q_{rs}=\sum_{k\in K_{rs}} \mathrm{f}_k^{rs} \quad \forall rs \in W$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs} \quad \forall rs \in W$$

【UE/FD-VIP】より第一項のみ残り

$$\sum_{rs}\sum_{k}(C_k^{rs}(f*)-u*_{rs})\cdot(\mathrm{f}_k^{rs}-\mathrm{f}_k^{rs*}) \geq 0 \quad \forall \mathrm{f},\mathrm{f}^* \in \Omega_{p0}$$

$$\sum_{rs}\sum_{k} u*_{rs}\,(\mathrm{f}_k^{rs}-\mathrm{f}_k^{rs*}) = \sum_{rs} u*_{rs}\,(q_{rs}-q_{rs}) = 0$$

$$\forall \mathrm{f},\mathrm{f}^* \in \Omega_{p0}$$

したがって経路交通量パターン$f*$が【UE/FD-VIP】の解であるならば

$$\sum_{rs}\sum_{k}\left(C_k^{rs}(f*)\right)\cdot(\mathrm{f}_k^{rs}-\mathrm{f}_k^{rs*}) \geq 0$$

※逆もまたしかり

利用者均衡配分問題は変分不等式問題VIP(c, Ω_{p0})と等価

2.2　VIPを用いた利用者均衡配分の表現

リンク変数

$$c_k^{rs} = \sum_{a \in A} \delta_{a,k}^{rs} t_a$$

ネットワーク全体の総走行費用は経路、リンク
どちらについて足し合わせても変わらない

$$\sum_{rs} \sum_{k} \left(C_k^{rs}(f) \right) \cdot \mathrm{f}_k^{rs} = \sum_{a \in A} t_a(x) \cdot x_a$$

これより以下のVIPが得られる

【UE/FD-VIP-Priminal】

$$\text{Find } x * \in \Omega_{p0}$$

$$s.t \sum_{a \in A} t_a(x *) \cdot (x_a - x_a^*) \geq 0 \ , \forall x \in \Omega_{p0}$$

※Ω_{p0}はフロー保存条件式、非負条件と以下の経路交通量と
リンク交通量の関係式を満たしたリンク交通量ベクトルの集合

2.2 VIPを用いた利用者均衡配分の表現

VIPとしてのいくつかの表現-相対問題（コスト変数）

【UE/FD-VIP】の領域をΩからΩ_{D0}に置き換えたVIP(F, Ω_{D0})

$$\Omega_{\mathrm{D0}}=\{(f,u)|u_{rs} \le C_k^{rs}(f)\ \forall k, \forall rs\}$$

【UE/FD-VIP】 の解はΩ_{D0}に属するのでVIP(F, Ω_{D0}) は【UE/FD-VIP】 と等価

任意の(f,u)∈ Ω_{D0}で【UE/FD–VIP】が成立するには、f=f*として【UE/FD-VIP】の左辺第一項が消え

$$\textstyle\sum_{rs}(\sum_k(\mathrm{f}_k^{rs*} - q_{rs}) \cdot (u_{rs} - u_{rs}^*) \ge 0 \quad \forall(\mathrm{f,u}) \in \Omega_{\mathrm{D0}}$$

⋮

リンクコスト関数の逆関数が存在するなら
利用者均衡配分は以下のVIPとして表現できる

Ω_{D0}は以下の条件を満たす集合

$u_{rs} \le \sum_{a\in A} \delta_{a,k}^{rs} t_a \quad \forall k \in K_{rs}\ \forall rs \in W$

【UE/FD-VIP-Dual】

$$\text{Find } (t*, u*) \in \Omega_{\mathrm{D0}}$$

$$s.t \sum_{a\in A} t_a^{-1}(t*) \cdot (t_a - t_a^*) - \sum_{rs\in W} q_{rs}(u_{rs} - u*_{rs}) \ge 0\ , \forall(t,u) \in \Omega_{D0}$$

2.2　VIPを用いた利用者均衡配分の表現

利用者均衡配分と最適化問題

Ωは閉凸集合,f(x):Ω→R^1が連続で微分可能な凸関数とするとCPP(f, Ω)の解とVIP(∇f, Ω)の解は一致

CPP(f, Ω)とVIP(∇f, Ω)は等価

【UE/FD-Priminal】

【UE/FD-Priminal】

$$min.Z_P(x) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

【UE/FD-Dual】

【UE/FD-Dual】

$$max.Z_D(t) = \sum_{re \in W} q_{rs} \min_{k \in K_{rs}} \left\{ \sum_{a \in L} t_a \delta_{a,k}^{rs} \right\} - \sum_{a \in A} \int_{t_{a(0)}}^{t_a} x_a(v)dv$$

2.2　VIPを用いた利用者均衡配分の表現

最適化問題【UE/FD-Priminal】と【UE/FD-Dual】の目的関数間の関係性

- 双対性定理

両問題の最適状態では目的関数$\mathrm{Z_P}$とZ_Dの値は完全に一致する

※ネットワーク全体の総走行費用が $\sum_{a\in A} x_a t_a = \sum_{re\in W} q_{rs} \min_{k\in K_{rs}} \left\{ \sum_{a\in L} t_a \delta_{a,k}^{rs} \right\}$

※任意の(x,t)について

$$\sum_{a\in A} \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega = \sum_{a\in A} x_a t_a - \sum_{a\in A} \int_{t_{a(0)}}^{t_a} x_a(v) dv$$

- 弱双対定理

両方、あるいはいずれかの問題が最適に到達していない状態では、$\mathrm{Z_P}$のほうがZ_Dよりも大きい

※利用者均衡状態でない(x,t)に対して常に以下が成立しているため

$$\sum_{a\in A} x_a t_a > \sum_{re\in W} q_{rs} \min_{k\in K_{rs}} \left\{ \sum_{a\in L} t_a \delta_{a,k}^{rs} \right\}$$

2.2　VIPを用いた利用者均衡配分の表現

<u>均衡解の一意性</u>

R^nの部分集合Ω上でF: Ω →Ωが狭義単調減少

$$\left(F(x)-F(x)\right)\cdot(x-y)>0 \quad \forall x,y\in\Omega,\ x\neq y$$

が成立するなら、VIP(F,Ω)の解は唯一

利用者均衡配分と等価な
【UE/FD-VIP-Priminal】

定理：連続・微分可能なリンクコスト写像を持つ利用者均衡配分問題では、その均衡リンク交通量はリンクコスト写像のJacobianが正定値であれば一意的に求まる

ただしリンクコスト写像が単調でない場合は複数の均衡解が存在しうる

利用者均衡配分の安定性

複数の均衡解が存在する場合、
意味のある解を求めるために安定性を確認

→利用者均衡状態に至るまでの過程を動的システムとして定式化

①Lyapunov安定的な配分調整プロセス

簡単のためODペアが一つの場合

利用者均衡状態

$$\mathrm{f}^{*} \in \Omega_{p0}\ and\ \ f_k'[c_k(\mathrm{f}*) - c_l(\mathrm{f}*)]_+ = 0 \qquad \forall k \neq l \in K$$

交通量変化

$$\Phi_k(f) = \underbrace{-\sum_{k \neq l} f_k\ [c_k(\mathrm{f}) - c_l(\mathrm{f})]_+}_{\text{移出}} + \underbrace{\sum_{k \neq l} f_l\ [c_l(\mathrm{f}) - c_k(\mathrm{f})]_+}_{\text{移入}}$$

コストが高い経路
ほどコストの低い
経路へ移動する

2.3　均衡解の安定性

$$\dot{f}(t) = \Phi(f(t)) \quad for\ \ t > 0$$

任意のtで微分可能で上式を満たすf(t)

動的システムの解＝均衡解

動的システムの安定性の定義

動的システムが安定
→任意の$f_0 \in \Omega_{P0}$に対して、初期値をf(0)=f_0とする動的システムの解がt→∞で空でない均衡集合に収束する

→以下の条件を満たす連続・微分可能なLyapunov関数Vが存在

・V(f)≥ $0 \quad \forall f \in \Omega_{P0}$
・fが均衡解である ($\dot{f}(t) = 0$)↔ V(f)=0
・fが均衡解でない ($\dot{f}(t) \neq 0$)↔ ∇V(f)· $\Phi(f)$ <0

2.3　均衡解の安定性

例

V(f) = $\sum_k \sum_{k \neq l} f_k \ \left[c_k(\mathrm{f}) - c_l(\mathrm{f})\right]_+^2 \qquad for\ f \quad \in \Omega_{P0}$

→1,2を満たす

C(f)が連続・微分可能ならVも微分可能

C(f)が$R_+^{\mathrm{K},}$上で単調なら

→3を満たす

リンクコスト関数が連続・微分可能で単調ならば動的システムは安定である
→任意の初期値から出発し動的システムに従って変化する交通量パターンは
　必ず利用者均衡配分状態へ収束する

2.3　均衡解の安定性

②Gap関数に基づいた配分調整プロセス

Gap関数：$\hat{G}(x) = \max_{y \in \Omega_p} t(x) \cdot (x - y)$

均衡解からの離れの度合いを示す指標

【UE/FD-VIP-Priminal】は $\min_{X \in \Omega_p} \hat{G}(x)$ と等価

→簡単に解けない

Gap関数を滑らかに再定義

$$G_q(x) = t(x)\big(x - H(x)\big) - 1/2\,(H(x) - x)Q(H(x) - x)$$

t(x)が連続・微分可能なら$G_q(x)$も連続・微分可能

＊$G_q(x)$は以下のような動的システムのLyapunov関数

$\dot{x}(t) = \Phi(x(t))$　　for t>0

$\Phi(x) \equiv H(x) - x$

→安定性が保証される